This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

No 14

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.S82
V.1

MATHESIS SUCCINCTA

PARS PRIMA COMPLECTENS

PRIMAS LINEAS METHODI MATHEMATICÆ, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, & ALGEBRAM.

CONSCRIPTA

A

P. PHILIPPO STEINMEYER S. J.

CUM FACULTATE.

Auguſtæ Vindelic. & Friburgi Brisgojæ,
Sumptibus Fratrum IGNATII & ANTONII
WAGNER. MDCCLXVII.

Hist. of Sci
Lull
11-6-36
33124

PRÆFATIO

Scopus præfixus, propagatio nimirum matheſeos inter litterarum alumnos, exigere videbatur & amicis, & mihi, ut, epitomes elementorum matheſeos univerſæ, novam epitomen concinnarem. Amantur enim ab iis, quibus prodeſſe cupiebam, ſumtuum & laboris compendia. En rationem, lector benevole, cur epitomen ſequatur *Matheſis ſuccincta*, epitomes epitome!

Quæ in hac legis, nolim a me inventa exiſtimes! pleraque adeo vulgata ſunt inter mathematicos, ut inventor vel ob antiquitatem omnes, vel ob novitatem neminem lateat; vel etiam eorum auctor nemo dici ambiat.

Quam-

Quamvis autem iſta matheſeos culto- ribus ſint notiſſima, maximam tamen li- teris & artibus utilitatem allatura ſunt, ſi multi, qui ingenio & induſtria va- lent, atque veritatem impenſe amant, acri ſtudio ea rimabuntur; ſi indagabunt, quomodo ex obviis & paſſim cognitis pri- ma ſcientiarum mathematicarum funda- menta ſint poſita; quomodo fundamento- rum firmitati ſit proſpectum; quomodo fundamentis inconcuſſis ſuperſtructa ſint alia aliaque, non minus firma, quam ſub- limia; atque ita multorum, per plura ſecula, conjunctis viribus, ſolidiſſimum, venuſtiſſimum, auguſtiſſimumque palatium Palladi, mathemata dirigenti, ſurrexerit.

Det DEUS, ut brevi, eruditorum quamplurimi, in ſuis quique diſciplinis, mathematicos ſtrenue æmulentur!

Cri-

PRIMÆ LINEÆ METHODI MATHEMATICÆ.

I.

Antiquiſſima apud mathematicos eſt diviſio diſciplinarum, quas tradunt, in *definitiones*, *axiomata*, *obſervationes*, *poſtulata*, *theoremata*, *problemata*, *corollaria*, & *ſcholia*. Diviſio hæc probe intellecta digito quaſi monſtrat viam ad claram, ordinatam, profundam, ſolidam, & utilem diſciplinarum tractationem, ut pluribus oſtendi in regulis præcipuis methodi mathematicæ. Hoc loco explicantur duntaxat voces in margine libelli hujus identidem occurſuræ. Ad has autem penitius intelligendas nonnulla alia præmitti opus eſt.

2. Actus animæ, quo rem quandam ſenſui objectam ſibi repræſentat, vocatur *Perceptio*; res autem ſenſui objecta, quatenus ab anima repræſentatur, *Idea* dicitur.

E. gr. Si in arborem vicinam oculos animumque convertis, eam præcipis; dum vero eam præcipis, anima ſibi arboris ideam, & quaſi ſimulacrum intra ſe efformare dicitur.

3. *Idea* dicitur *clara*, ſi ſufficit ad rem agnoſcendam, & ab aliis diſcernendam: *obſcura* autem, ſi ad ea non ſufficit.

E. gr. Clara eſt idea arboris, ſi probe noſti, quod vides eſſe arborem, non autem eſſe hominem vel aliud quidpiam: e contrario obſcurum & nonſuum clara eſſet viſio, ſi quid e longinquo intuens ignorares ſitne arbor an homo, nix an murus, equus an bos, mons an nubes.

4. *Idea* clara erit *diſtincta*, ſi plura, a ſe invicem diverſa, in re repræſentata diſcernis: *confuſa* eſt idea, quæ clara quidem eſt, ſed in re repræſentata nihil ab altero diverſum agnoſcit.

E. gr. Idea arboris eſt diſtincta, ſi radicem a ſtipite, ſtipitem a ramis, ramos a ſurculis, ſurculos a foliis diſcernis; idea ſtipidis eſt diſtincta, ſi in reſecto diſcernis corticem a libro (dem Baſte), librum a pulpa (dem Holze), & pulpam a medulla (dem Marke): idea autem, quam de colore viridi foliorum habes, clara quiſ-

quidem erit ſed confuſe; nihil enim in colore agnoſcis, quod ſit ab altero diverſum, & quo differat a colore albo, rubro, flavo &c. etſi optime noris, eum ab iis coloribus differre. Agnoſcis quidem eum eſſe viridem, ſed neſcis dicere, unde eum agnoſcas eſſe viridem, & quibus notis, ſeu indiciis, eum diſcernas a rubro, albo, flavo &c. Quodſi notas, ſeu indicia, enumerare poſſes, unde colorem viridem agnoſcas, & ab aliis coloribus diſtinguas; tum demum ideam ejus diſtinctam haberes.

5. Enumeratio notarum, ſeu indiciorum, ex quibus res omni tempore agnoſci, atque ab aliis diſtingui poteſt, *Definitio* appellatur.

E. gr. Si interrogatus quid ſit *ira*, reſpondes, *iram eſſe tædium inſigne ortum ex injuria nobis vel aliis illata, conjunctum cum odio ejus, qui eam intulit*; enumeraſti notas, & indicia ſufficientia, ad iram omni tempore agnoſcendam, & ab aliis affectibus diſcernendam; etſi forte, (ſi de aliorum ira quæritur), non ſemper tibi conſtet, an tædium alterius ſit inſigne, an ſit cum odio conjunctum &c. Sed ſi ex verbis Titii agnoſcis animum illius tædio inſigni eſſe correptum; ſi agnoſcis tædium hoc oriri ex eo, quod Titius putet ſibi, vel aliis quos amat, injuriam a Cajo eſſe factam; ſi denique agnoſcis, tædio ſociari odium Caji, qui injuriam feciſſe putatur; tum certiſſime concludis, affectum, qui Titium invaſit, non eſſe duntaxat indignationem, ſed iram; etſi aliud forte vultu, geſtuve ſimulet.

6. *Definitio* modo commemorata (§. 5.) appellatur etiam *nominalis*, ut diſtinguatur a reali ſeu genetica. Appellatur enim *Definitio realis* ſeu *genetica*, quæ exponit modum, quo res oritur, ſeu producitur.

E. gr. Qui dicit, *Deſperatio oritur, ſi malum nobis repræſentamus ut inevitabile & intolerabile*, definitionem dat realem deſperationis.

7. Sunt aliqua, quæ vera eſſe agnoſcuntur, quam primum intelligis vocabula (veluti ſi dico *inæqualium unum majus, alterum minus eſt*), & hæc appellantur *Axiomata*: ſunt alia, quorum veritas ſolo ſenſu duce agnoſcitur (veluti aquam vaſis cujuscunque figuram induere), & hæc appellantur *Experientiæ*, vel *Obſervationes*: ſunt denique alia, quæ quomodo fieri, ſeu effici, queant, manifeſtum eſt omnibus; & hæc dicuntur *Poſtulata*; veluti ſi poſtulas a puncto dato ad aliud punctum in charta aſſignatum duci lineam rectam; vel numerum 2 addi numero 8.

8. Enimvero ſunt etiam alia, quorum veritas ex aliis veritatibus antea cognitis derivanda eſt; ut ſi dico *Sol eſt major tellure*. Hoc enim ita ſe habere nec ſolius ſenſus ductu agnoſcitur, nec intellectis vocabulis illico liquet.

Atque ejuſmodi aſſerta appellantur *Theoremata*; ipſa autem aſſerti derivatio ex aliis ante cognitis, vocatur *Demonſtratio*, ſiquidem tum ea indubitato ſunt vera, ex quibus aſſertum derivatur; tum etiam modus, quo derivatur eſt legitimus, omnique exceptione major. Sed hæc paucis unquam, multis hoc loco explicari nequeunt.

9. Si quid fieri, produci, inveniri poſtulatur, quod quomodo fieri, produci, inveniri queat, unicuique notum haud eſt, proponi dicitur *Problema*. Veluti, ſi quis petit, quanta ſit altitudo montis eminus viſi; quomodo affectus quiſpiam animi excitari, aut excitatus ſedari vel mitigari poſſit; quomodo virtus quæpiam ſit acquirenda, quomodo vitium extirpandum, & alia hujuſmodi innumera.

Modus, quo fieri vel inveniri poteſt quod quæritur, diſtincte expoſitus, appellatur *Reſolutio problematis*. Ita Athenodorus philoſophus problema ab Auguſto Cæſare ſibi propoſitum (quo modo nempe avertendum ſit, ne iræ impetus ad agendum inconſulta nos abripiat) reſolvit ſuadendo, ut, quamprimum ira animum pulſat, alphabethi græci literæ omnes ex ordine recitaren-

rentur ante, quam aliud quidquam dicatur, aut fiat.

Reſolutioni problematis jungenda eſt demonſtratio, qua oſtendatur, *factis iis, quæ in reſolutione præcipiuntur, fieri aut inveniri quod petebatur*. Ita Athenodorus conſilium Auguſto datum rationi eſſe conforme oſtendere poterat ſequentem in modum:

Qui, quamprimum ira pectus pulſat, ſingulas alphabethi græci literas ex ordine recitat; animum ab objecto iram excitante avertit, & ad ideam diſtinctam alphabethi græci formandam convertit (§. 4.).

Enimvero qui animum ab objecto affectum excitante avertit, & ad notiones diſtinctas formandas convertit, is affectum, adeoque etiam iram, ſedat, aut ſaltem mitigat; ut ex philoſophia morali ſeu ethica conſtat.

Ergo qui, quamprimum ira pectus pulſat, ſingulas alphabethi græci literas ex ordine recitat, is iram ſedat, aut ſaltem mitigat.

10. Nonnunquam ex veritate una deducitur paucis altera, quæ tunc *Corollarium* appellatur.

11. Denique afferuntur ſæpe exempla ſingularia, ad quæ definitiones, axiomata, theoremata, problemata &c. ap-

applicantur; nonnunquam commendatur utilitas doctrinæ propoſitæ, narratur hiſtoria vel occaſio inventionis &c. Atque iſta dicuntur *Scholia*; in hoc autem libello, ſcholiorum nomine omiſſo, ex ſolo charactere minuto ſatis agnoſcuntur.

12. Univerſim *methodi mathematicæ ſuprema lex* eſt, ut *ea conſtanter præmittantur, ex quibus ſequentia intelligi, & vera agnoſci poſſint.*

E. gr. vel *e. gr.*, aut *e. g.* idem eſt ac *Exempli gratia.*

Q. *e. d.* legitur *Quod erat demonſtrandum.*

ARITHMETICA.

Definitio. 1. *Arithmetica* eſt numerorum ſcientia. Abit in partes duas theoreticam & practicam: *theoretica* docet, quænam numeris conveniant; *practica* oſtendit, quomodo ex numeris datis inveniantur alii, quorum ad cognitos data fuit relatio. E. gr. quot floreni obtingant uni ex 5 hæredibus, ſi maſſa hæreditatis, in partes æquales dividendæ, ſit 34565 florenorum.

Arithmeticæ utilitates pleraſque nemo non novit; eas, quæ faciunt ad intellectum excolendum, legere eſt in tirocinio arithmetico ſeparatim edito; &, ni fallor, inde etiam hauriri poſſunt non exigua intellectûs perficiendi adjumenta.

Definitio. 2. *Numerus* eſt multitudo unitatum earundem. Dicuntur autem *unitates eadem*, quæ per eandem notionem agnoſcuntur.

E. gr. Milites omnes ejuſdem legionis per eandem notionem agnoſcuntur; quare cum etiam quilibet miles ſit unum quid; multi milites ejuſdem legionis faciunt multitudinem unitatum earundem, adeoque numerum. Si-

militer hominibus omnibus communis eademque reſpondet notio, per quam agnoſcuntur, & ab ab aliis rebus omnibus diſcernuntur: quare cum etiam quilibet homo ſit unum quid, multi homines faciunt multas unitates eaſdem, adeoque numerum.

3. *Numerus quilibet augeri poteſt vel minui.* Corollar. Cum enim numerus ſit multitudo unitatum, una vel aliquot unitates eidem demi poſſunt, adeoque poteſt fieri minor, ſeu minui. E contrario non repugnat unitatibus numerum conſtituentibus adjici unitates alias cum prioribus easdem; creſcere ergo multitudo unitatum poteſt, & fieri major; adeoque numerus poteſt augeri.

4. *Numeri*, quorum unitates ſunt Definitio. eædem, dicuntur *homogenei.*

E. gr. tres milites, & quatuor milites numeros dant homogeneos.

5. *Numeri*, quorum unitates non ſunt eædem dicuntur *heterogenei.*

E. gr. Tres floreni & 4 cruciger i numeros efficiunt heterogeneos.

6. Cum unitates numerorum hete- Corollar. rogeneorum ſint diverſæ, & non eædem (§. 5), plures numeri heterogenei, quamdiu heterogenei ſunt, multitudinem unitatum earundem efficere

non poſſunt; adeoque in unum numerum coaleſcere ſeu conjungi nequeunt (§. 2). E contrario cum numeri homogenei iisdem unitatibus conſtent (§. 4), ubi conjunguntur, prodit denuo multitudo unitatum earundem, adeoque numerus (§. 2.). Numeri ergo homogenei in unum numerum coaleſcere, & conjungi poſſunt.

Coroll. 2. 7. Si numerus augetur, eidem vel adjiciuntur diverſi numeri homogenei inter ſe & cum ipſo; vel idem numerus ſæpius ſibi ipſi adjicitur. Si prius fit, dicitur *Additio* fieri: ſi poſterius contingit, fit *Multiplicatio*. Quodſi numerus minuitur, vel alius numerus ab eo ſemel aufertur, vel idem numerus alius ab eo toties aufertur, quoties id fieri poteſt. Prior operatio dicitur *Subtractio*, poſterior *Diviſio*. Atque hæ quatuor operationes, nempe Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diviſio dicuntur quatuor ſpecies arithmeticæ, de quibus deinceps redibit ſermo.

Hypotheſis. 8. Quoties ab unitate numerando progreſſus es usque ad denarium, toties redi ad unitatem; adde tamen, quoties huc usque numeraveris decem.

Le-

Legem hanc numerandi, quam a prima ætate tenuimus, numerus digitorum amborum manuum ſtabilivit, quod homines digitis in numerando utantur. Commoda ſenſiſſemus plura, ſi initio placuiſſet numerando progredi usque ad duodenarium, & tum demum redire ad unitatem.

9. Opus eſt ergo decem nominibus ad decem primos numeros indigitandos, & rurſus nominibus ſeu vocabulis aliis ad multitudinem decadum denotandam. Priora nomina ſunt *unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*: poſteriora ſunt *viginti*, *triginta*, *quadraginta*, *quinquaginta*, *ſexaginta*, *ſeptuaginta*, *octoginta*, *nonaginta*, *centum*. Corollar.

10. Porro, ad majores numeros brevius enunciandos, decies centum appellentur *mille*, millies mille appellentur *millio*, millies mille milliones, ſeu millio millionum appelletur *billio*, millio billionum *trillio*, millio trillionum *quatrillio*, millio quatrillionum *quintillio*, & ſic deinceps. *Hypotheſis.*

11. Ut numeri quantumvis magni breviſſime ſcribi, numeri diverſi commode inter ſe comparari, & ante oculos poni queant, primi novem numeri denotentur notis, ſeu characteribus, *Hypotheſis.*

ribus, ſequentibus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nę vero ad reliquos majores numeros dęſignandos notis pluribus opus ſit, memoratis modo characteribus tribuatur valor a loco quem occupant, ſi a dextra ſiniſtram verſus in una eademque ſerie ſcribuntur.

Nempe primo a dextris loco denotent unitates, ut ante; ſecundo loco decades, tertio centenarios, quarto millenarios, ſeu millenariorum unitates, quinto decades millenariorum, ſexto centenarios millenariorum, ſeptimo milliones, ſeu unitates millionum, octavo decades millionum, nono centenarios millionum, decimo millenarios millionum, ſeu unitates millenariorum millionum. Atque ita porro. Loca autem vacua, ſeu in quibus numerus nullus occurrit, implentur ſigno ſeu nota (o), quæ *nulla*, *cyphra*, vel *zero* appellatur.

Problema. 12. *Nunc um quemvis ſcriptum enunciare*, ſeu notæ cujuslibet in numero quantumvis magno valorem indicare.

Reſolutio. 1. A dextris incipe, ac numerum propoſitum per commata inferius poſita divide in claſſes. Claſſis quælibet, ſiniſtima forte excepta, tribus notis conſtare debet.

2. Supra notam, quæ alterum comma ſequitur, ſcribe lineolam unam; ſuprá notam, poſt quartum comma poſitam, duas &c.

3. Com-

3. Comma quodlibet ſolitarium effer per mille; commata, quibus lineola una vel plures ſuperius imminent, tacitus præteri; lineolam vero ſuperiorem unam effer per milliones, duas per billiones, tres per trilliones &c.

4. Denique cujusque claſſis notam ſiniſtimam effer per centenarios, mediam per decades, dextimam per unitates. Et factum eſt quod petebatur.

E. gr. Sit enunciandus numerus

639, 536, 250, 307, 023, 647, 000

dices: ſexcenti triginta novem trilliones, quingenta triginta ſex millia (billionum), ducenti quinquaginta billiones, trecenta & ſeptem millia (millionum), ac viginti tres milliones, ſexcenta quadraginta ſeptem millia.

13. *Additio* eſt inventio numeri, qui pluribus numeris datis ſimul ſumtis ſit æqualis. Numeri dati appellantur *addendi*, vel *aggregandi*; numerus inventus dicitur *ſumma*, vel *aggregatum*. Definitio.

14. *Numerus quilibet, qualibet magnitudo, qualibet quantitas æqualis eſt ſibimet ipſi.* Axioma.

15. Mathematicis ſignum peculiare eſt, quo duorum æqualitatem indicant, nempe $=$. Eſt quoque ipſis ſignum additionis $+$, quod efferunt per *&*, vel *plus*. Unde denotaturi, ſex & tria ſimul, æqualia eſſe novenario, ſcribunt $6 + 3 = 9$.

16. Æqua-

Axioma. 16. *Æqualia eidem tertio ſunt æqualia inter ſe.*

E. gr. $6 + 3 = 9$
& $7 + 2 = 9$

Ergo $7 + 2 = 6 + 3$

Axioma. 17. *Æqualibus æqualia inter ſe ſunt æqualia.*

E. gr. $7 + 3 = 10$
$5 + 5 = 7 + 3$
$6 + 4 = 10$

$5 + 5 = 6 + 4$

Axioma. 18. *Si æqualibus adduntur æqualia, ſummæ ſunt æquales. Si vero majori & minori idem vel æqualia addis, ſumma prior poſteriore major eſt.*

19. Majus indicatur ſigno $>$, minus ſigno $<$. Sic indicaturi 8 eſſe majus quid quam 6, ſcribimus $8 > 6$. E contrario $6 < 8$ effertur per 6 minus 8.

Axioma. 20. *Quod uno æqualium majus vel minus eſt, etiam altero æqualium majus vel minus eſt.*

Axioma. 21. *Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.* Unde

Corollar. 22. *Totum quolibet ſua parte majus eſt.*

Problema. 23. *Numeros homogeneos diverſos addere.*

1. Nu-

1. Numeri dati ita ſibi ſubſcribantur, ut unitates ſub unitatibus, decades ſub decadibus, centenarii ſub centenariis &c. collocentur (§. 11). Reſolutio.

2. Ducta dein ſub numeris ſcriptis linea, unitates ſeorſim unitatibus annumerentur, earumque ſumma ſub ipſis infra lineam ſcribatur. Quodſi hæc decades contineat, adnumerantur hæ decadibus numerorum datorum, decadumque ſumma rurſus ſub ipſis infra lineam ſcribitur.

3. Eadem ratione centenarios, millenarios, reliquasque partes numerorum datorum in unam ſummam colligis, obtinebisque tandem ſummam quæſitam.

E. gr. Sint numeri addendi 17345. 6854. 739. 67. Fiet

```
 17345
  6854
   739
    67
```



Exam.

Numerus inventus 25005.

Attentus ad ea, quæ facienda præcipiuntur, deprehendis numerum inventum continere omnes unitates, decades, centenarios &c. numerorum datorum, adeoque omnes eorum partes ſimul ſumtas (§. 11). Erit ergo æqualis nu- Demonſtratio.

me-

meris datis totis ſimul ſumtis (§. 21.); igitur eſt additio bene peracta (§. 13).

Problema & Reſolutio. 24. *Examen* additionis bene inſtitutæ eſt hujusmodi.

1. Ductis per modum crucis obliquæ duabus lineis, conſidera ſingulas partes numerorum datorum inſtar unitatum, & ex iis abjice novenarium, quoties potes; reſiduum ſcribe ſupra crucem.

2. Eodem modo abjice novenarios ex numero invento: & reſiduum ſcribe infra crucem. Quodſi duo reſidua fuerint æqualia, veroſimile ſit additionis regulas exacte fuiſſe obſervatas.

Problema. 25. *Numeros heterogeneos addere.*

Reſolutio. Si numeri dati fuerint alii homogenei, alii heterogenei,

1. Homogenei homogeneis ſubſcribuntur, e. gr. floreni florenis, crucigeri crucigeris, nummi nummis.

2. Ex numeris homogeneis ſpeciei vel valoris minoris, toties colligitur valor ſpeciei majoris, quoties id fieri poteſt; totidem vero unitates adjiciuntur quoque ſpeciei majori; reſiduum ſcribitur ſub numeris datis ſpeciei minoris infra lineam.

Quodſi ita pergis, tandem reperies ſummam quæſitam.

E. gr.

E. gr. Sint dati numeri addendi.

	16 fl.	17 *crucig.*	3 *nummi.*
	21	34	2
	4	45	1
	3	26	2
Summa erit	46	4	0

26. Examen hujus additionis fit, ſi ſemel aſcendendo, ſemel deſcendendo numeros homogeneos cujuslibet ſeriei in unam ſummam colligis. Ceterum ex ejusmodi exemplis perſpicitur, additionem cum numeratione pecuniæ convenire. Unde ex vulgari modo numerandi pecuniam regulæ additionis inveniri poſſunt, & oblivioni traditæ in memoriam revocari.

27. *Subtractio* eſt inventio numeri ex duobus datis, qui cum uno datorum ſimul ſumtus æqualis ſit datorum alteri. E. gr. Si 3 ſubtraho ex 7, manent 4. eſt autem $4 + 3 = 7$. Numerus inventus dicitur *differentia*, vel *reſiduum*. Datorum ille, cui æqualis eſt differentia cum altero datorum ſimul ſumta, dicitur *minuendus*, alter datorum *ſubtrahendus*. Definitio.

28. Eſt mathematicis ſignum peculiare ſubtractionis, nempe —, quod per *minus* efferunt. Unde deſignaturi 3 ſubtrahi ex 7, ſcribunt $7-3$.

29. *Si ab æqualibus ſubtrahuntur æqualia, reſidua ſunt æqualia: ſi vero a majore & minore idem vel æqualia ſubtrahuntur.* Axioma.

buntur, aut ſi ab æqualibus ſubtrahitur minus & majus reſiduum prius poſteriore majus eſt.

Problema. 30. *Minorem numerum a majore ſubtrahere.*

Reſolutio. 1. Minor numerus ſubſcribitur majori ut in additione.

2. Ducta ſub ſcriptis ita numeris linea ſubtrahuntur ſeorſim unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. reſiduo quolibet infra lineam ſcripto.

3. Si contingat numerum quendam ſubtrahendi majorem eſſe numero imminente minuendi, a nota ſiniſteriore minuendi mutua petitur unitas, quæ in locum dextrum translata valet 10. Atque tum numerus imminens ſubtrahendo erit denario auctus (§. 11.), nota autem ſiniſterior minuendi valebit uno minus; id quod puncto ſupra eam ſcripto notatur.

4. Quodſi nota ſiniſterior minuendi eſſet 0, tamdiu ſiniſtrorſum fiat progreſſus, donec occurrat nota, quæ ſit vel unitas, vel unitate major. Inde ſi mutuo accipitur unitas perinde eſt ac ſi nota imminens minuendi denario eſſet aucta, in locis vero vacuis ſeu 0 repletis omnibus novenarius eſſet collocatus (§. 11).

E. gr.

E. gr. Si fuerint 5789678 ſubtrahenda ex 8000324. fiet

8000324	*Minuendus.*
5789678	*Subtrahendus.*
2210646	*Reſiduum.*

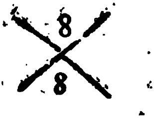
Si facis, quæ præcepta ſunt in reſolutione problematis, numerus inventus complectitur exceſſum unitatum, decadum &c. ſeu ſingularum partium minuendi ſupra unitates, decades &c. ſeu ſingulas partes ſubtrahendi, adeoque exceſſum totius minuendi ſuprà totum ſubtrahendum (§. 21): numerus ergo inventus ſimul cum ſubtrahendo æqualis erit minuendo. Igitur ſubtractio eſt bene peracta (§. 27). Demonſtratio.

31. *Examen ſubtractionis* fit *vel* addendo reſiduum ſubtrahendo; ſi enim ſumma æqualis eſt minuendo, nihil aberratum eſt in applicandis regulis ſubtrahendi (§. 27), *vel* per novenarios ut in additione (§. 24), habendo nempe minuendum pro ſumma, ſubtrahendum & reſiduum pro numeris addendis. Problema & Reſolutio.

E. gr.

$$\left.\begin{array}{r} 8000324 \\ 5789678 \\ \hline 2210646 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} \hline 8000324 \end{array}$$



Problema. 32. Subtractio numerorum heterogeneorum non differt a ſubtractione homogeneorum niſi quod unitas, ſi qua ex ſpecie majore mutuo petenda eſt, in loco ſpeciei minoris non valeat 10; ſed tot, quot unitates ſpeciei minoris æquivalent unitati ſpeciei majoris. Sic 1 ex florenis ſi transfertur in locum crucigerorum non valet 10 ſed 60, quia 60 cruciger æquant 1 florenum. 1. ex crucigeris in locum nummorum ſi transfertur valet 4, quia 4 nummi æquant 1 crucigerum.

E. gr.	30 fl.	10 crucig.	2 nummi
	19	40	3
	10	29	3

Si moneta major erogatur ad ſolvendum debitum minus, dum exceſſus monetæ ultra debitum reſtituitur, non aliter agimus. Unde ab ejusmodi operatione derivari potuere regulæ ſubtractionis.

Definitio. 33. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties contineatur datorum unus, quoties unitas in altero.

E. gr. Bis ſex ſunt 12. quoties autem 6 in 12, toties 1 in 2.

34. Numerus per multiplicationem inventus dicitur *Factum* vel *Productum*; numeri dati dicuntur *Factores*, vel *Efficientes*; & eorum alter *Multiplicandus*, alter *multiplicans*. Nempe quoties 1 eſt in multiplicante, toties multiplicandus in facto.

35. Mul-

35. Multiplicationis quoque peculiare ſignum eſt mathematicis, nempe punctum inter duos numeros poſitum, vel crux obliqua iisdem interjecta, ut 2 . 6 = 12 vel 2 ⨯ 6 = 12. Si quantitates vel numeri deſignantur per literas, e. gr. per *a* & *b*, literæ ſine ullo ſigno interjecto conjunctæ indicant multiplicationem. Sic *ab* denotat quantitatem vel numerum per *a* deſignatum multiplicari per numerum, quem deſignat *b*.

36. *Si æqualia per idem vel æqualia multiplicantur, facta ſunt æqualia. Quodſi majus & minus per idem vel æqualia multiplicas, factum prius poſteriore majus eſt.* Axioma.

37. *Abacum Pythagoricum conſtruere.* Problema.

1. Singula Quadrati AB DC latera divide in 9 partes æquales. Reſolutio. Fig. un. Tab. arith.

2. Per diviſionum iſtarum puncta ductis lineis transverſis diſtribue totum quadratum in areolas.

3. In ſerie areolarum horizontali ſuprema AB, & in ſerie verticali ſiniſtima A C deſcribantur novem notæ numerorum uſitatæ.

4. In ſerie horizontali ſupremæ proxima adde 2 ad 2, & habes 4; tum 2 ad 4 & habes 6, rurſus 2 ad 6 & habes 8. & ſic deinceps reliquos ejus ſeriei numeros invenies.

5. Eodem modo deſcende ad ſeriem horizontalem ſequentem, & dic 3 + 3 = 6. porro 3 + 6 = 9; 3 + 9 =

12 &c. Quodſi eadem lege inſtituis additionem in reliquis omnibus ſeriebus, abacus pythagoricus erit conſtructus.

Abacus hic pythagoricus ad manus eſſe debet, quoties multiplicatio aut diviſio inſtituenda eſt; antequam eum memoriæ mandaveris.

Problema. 38. *Numerum datum per datum alium multiplicare.*

1. Multiplicantem ſubſcribe multiplicando, ut numeros in ſubtractione; ductaque linea

2. Si multiplicans conſtat unica nota, ducatur ea ſingillatim in omnes multiplicandi notas, initio facto a dextra ſiniſtram verſus, producta autem ſingula ex abaco pythagorico ita infra lineam ſcribantur, ut nota ſiniſtra cujuslibet producti annumeretur producto proxime ſiniſteriori.

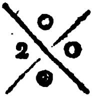
3. Si multiplicans conſtat pluribus notis, eodem modo ſingulas ejus notas ducis in notas omnes multiplicandi, niſi quod producta ex decadibus multiplicandis in loco decadum, producta ex centenariis multiplicandis in loco centenariorum &c. ſcribere incipias; producta autem partialia tandem addas, ut ſumma det productum quæſitum integrum.

E. gr. Si 345 multiplicari debent per 7, fiet

```
 345
   7
----
2415
```

Si 7832 multiplicanda per 234, fiet

```
   7832
    243
-------
  23496
 31328
15664
-------
1903176
```



Productum primum partiale intra lineas ſcriptum vi operationis ſingulas multiplicandi partes, adeoque totum multiplicandum (§. 21) continet toties, quoties nota dextima multiplicantis continet unitatem. Similiter, quia productum partiale ſecundum in loco decadum ſcribi cœpit, etiam ab illo toties continetur multiplicandus, quoties nota media multiplicantis continet unitatem (§. 21, 11.) &c. At dum producta partialia intra lineas ſcripta adduntur, ſumma iisdem eſt æqualis (§. 13); ergo productum integrum toties continet multiplicandum, quoties ſingulæ multiplicantis notæ, ſed omnes ejus partes, adeoque totus multiplicans (§. 21.) continet unitatem. Numerus ergo inventus eſt factum ex multiplicante in multiplicandum (§. 33, 34). Demonſtratio.

 39. Si

39. *Si factori vel alterutri vel utrique adhærent* cyphræ ſeu zeri, producto per reliquas notas invento a dextris junguntur totidem cyphræ.

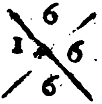
E. gr. 340 | 250
2 | 300
680 | 75000





40 Si nota ſiniſtra multiplicantis eſt 1, productum ex nota multiplicantis dextra ſcribitur loco uno magis ad dextram, eidemque deinceps inter multiplicandum mox additur multiplicandus, ut habeatur productum integrum.

E. gr. 36784
15
551760 *Product. integr.*



41. *Examen multiplicationis ſic inſtituitur.*

1. Ex utroque factore abjice novenarium quoties potes; reſiduum ex uno ſcribe a dextris crucis obliquæ; reſiduum ex altero a ſiniſtris.

2. Multiplica hæc duo reſidua inter ſe, & ſiquidem productum inde ortum ſit novenario majus, ex eo rurſus abjice novenarios, & reſiduum ſcribe ſupra crucem,

3. Denique abjice novenarios ex numero invento ſeu producto integro, & reſiduum ſcribe infra crucem.

Quodſi reſidua infra & ſupra crucem ſcripta fuerint æqualia; indicium id eſt probabile multiplicationis bene peractæ.

Exempla occurrunt §§. 38, 39, 40.

42. Di-

42. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus inventus dicitur *Quotus*; datorum ille, de quo quæritur quoties in altero contineatur, appellatur *Diviſor*; alter *Dividendus*. Definitio.

43. Cum multiplicandus toties contineatur in facto, quoties 1 in multiplicante (§. 33); dividendus inſtar facti, diviſor inſtar multiplicandi, quotus inſtar multiplicantis ſpectari poteſt. Corollar.

44. Diviſio indicari ſolet per puncta duo inter dividendum & diviſorem poſita, vel per lineolam, ſub qua ſcribitur diviſor, ſupra eam dividendus.

E. gr. Si 63 dividi debent per 9, ſcribitur vel 63 : 9 vel $\frac{63}{9}$.

45. *Si æqualia per æqualia dividis, quoti ſunt æquales. Quodſi majus & minus per idem vel æqualia dividis, quotus prior poſteriore major eſt.* Axioma.

46. *Diviſionem inſtituere, ſi diviſor eſt nota unica.* Problema.

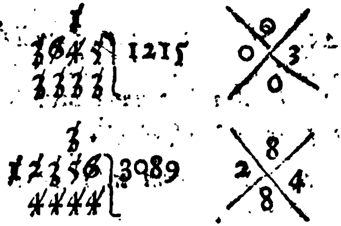
1. Diviſorem ſcribe ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit diviſore, ſub nota dividendi proxime ſequente.

2. Ope abaci pythagorici inveſtiga, quoties diviſor in nota, vel notis dividendi ſupra ſcriptis contineatur; numerum, qui id indicat, pone a dextris dividendi poſt lunulam.

3. Per quotum modo inventum multiplica diviſorem, & factum ex nota vel notis dividendi ſupra diviſorem ſcriptis ſubtrahe.

4. Deletis dividendi notis, ex quibus facta eſt ſubtractio, & reſiduo, ſi quod eſt, ſuperſcripto, promove diviſorem dextrorſum ad notam ſequentem dividendi, & operationem juxta regulam ſecundam & ſequentes tamdiu repete, donec nulla ſuperſit dividendi nota. Et factum eſt, quod petebatur.

E. gr.



Demonſtratio. Numerus inventus indicat, quoties diviſor contineatur in millenariis, centenariis, decadibus &c. dividendi, ſeu in partibus omnibus dividendi (§. 11), adeoque in toto dividendo (§. 21); nume-

merus ergo inventus toties continet unitatem, quoties dividendus diviſorem. Igitur diviſio bene inſtituta (§. 42).

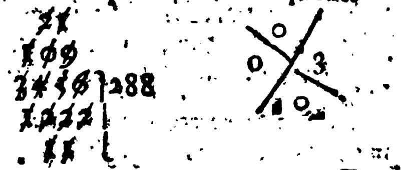
47. *Diviſionem inſtituere, ſi diviſor pluribus notis conſtat.* Problema.

1. Subſcribe diviſorem ſiniſtimis notis dividendi, & explora per abacum pythagoricum quoties ſiniſtima nota diviſoris in ſiniſtima vel duabus ſiniſtimis notis dividendi contineatur.

2. Quoto invento multiplica totum diviſorem, & ſiquidem factum ex notis dividendi ſupra diviſorem ſcriptis ſubtrahi queat; quotum colloca poſt lunulam a dextris dividendi, & factum re ipſa ſubtrahe, deletis notis, a quibus ſubtractio facta eſt, & reſiduo ſupra deletas ſcripto.

3. Quodſi factum ſubtrahi nequeat, quoto invento unam vel plures unitates deme, donec ſubtractio facti fieri poſſit.

4. Facta ſubtractione diviſorem loco uno dextrorſum promove, & denuo ſecundum præcedentes regulas age, donec diviſor ulterius promoveri nequeat.

E. gr. 

De-

Demonſtratio eadem fere quæ problematis præcedentis.

48. Sumitur in diviſionibus hujusmodi, toties contineri totum diviſorem in notis dividendi diviſori imminentibus, quoties prima nota diviſoris continetur in prima nota dividendi. Sumtio hæc equidem ſæpe fallit; in errorem tamen inducere nequit, quia quam primum ad examen revocatur, & ſi fallit emendatur. Non aliter agunt aſtronomi; quando ea, quæ ſumunt, ſeu hypotheſes ſuas & quæ inde deducuntur cum obſervationibus conferunt; & ex obſervationibus hypotheſes emendant. Eandem viam ingrediuntur, qui phyſicam & medicinam ad majorem perfectionem evehere modo conveniente nituntur.

49. *Examen diviſionis* fit per abjectos novenarios, ut in multiplicatione. Sed dividendus conſiderandus eſt inſtar facti, diviſor & quotus æquiparantur factoribus (§. 41.). Exempla occurrunt §§. 46. 47. Examinat quoque diviſio multiplicationem, multiplicatio diviſionem. Nam ſi factum dividitur per factorem unum, quotus eſt factor alter; ſi diviſor multiplicatur per quotum, vel quotus per diviſorem, factum eſt dividendus; ut demonſtrabitur infra §. 108.

Definitio. **50. *Numerus integer* dicitur, qui unitatem pro parte habet: *numerus* autem *fractus* appellatur, qui eſt pars unitatis, appellatur etiam *fractio*, vel *minutia*.**

51. Scribitur fractio duobus numeris lineola interjecta ſeparatis, ut $\frac{2}{3}$. Inferior (3) indicat

in

in quot partes unum ſeu totum ſit diviſum: ſuperior (2) oſtendit, quot ejusmodi partibus totius æquivaleat fractio. Superior *Numerator*, inferior *Denominator* dicitur; ab ipſo enim fractio nomen ſuum habet, nam $\frac{2}{3}$ idem eſt ac duæ partes *tertiæ* totius, $\frac{3}{4}$ tres partes *quartæ* unius ſeu totius.

52. *Si denominator fractionis* ($\frac{2}{3}$) *multiplicatur per numerum integrum* (5), *numeratore non mutato; fractio nova* ($\frac{2}{15}$) *toties eſt minor priore* ($\frac{2}{3}$), *quot unitates habet integer multiplicans* (5). Theorema.

Cum enim unitas, ſeu totum prius eſſet in tres duntaxat partes diviſum, nunc dividitur in 15, adeoque in quinquies plures; id quod fit, ſi pars priorum trium quælibet dividatur in 5 partes minores. Ergo una pars nova eſt quinquies minor una priorum; igitur & duæ partes novæ ſunt quinquies minores duabus prioribus. Fractio igitur nova eſt quinquies minor priore. *Q. e. d.* Demonſtratio.

53. *Si denominatore non mutato, fractionis* ($\frac{2}{3}$) *numerator multiplicatur per numerum integrum* (5); *fractio nova* ($\frac{10}{3}$) *toties priore major eſt, quot unitates habet integer multiplicans* (5). Theorema.

Cum enim denominator ſit nomen duntaxat fractionis (§. 51); fractio utique multiplicatur per numerum inte- Demonſtratio.

grum,

grum, ſi ſolus numerator multiplicatur. Sed in multiplicatione multiplicandus toties continetur in facto, quoties unitas in multiplicante (§§. 33, 34); ergo etiam fractio prior toties continetur in nova, quoties 1 in multiplicante. Ergo toties nova major eſt priore.

Theorema. 54. *Si tam numerator quam denominator fractionis* ($\frac{2}{3}$) *multiplicatur per eundem numerum* (5); *nova fractio* ($\frac{10}{15}$) *eſt priori æqualis.*

Demonſtratio. Si enim denominator fractionis multiplicatur ſolus per 5, fractio inde prodiens $\frac{2}{15}$ eſt quinquies minor priore $\frac{2}{3}$ (§. 52). Si autem fractionis $\frac{2}{15}$ ſolus numerator multiplicatur per 5, fractio nova $\frac{10}{15}$ eſt quinquies major priore $\frac{2}{15}$. Ergo nova fractio $\frac{10}{15}$ eſt rurſus æqualis antiquæ $\frac{2}{3}$. Q. *e. d.*

Problema. 55. Quodſi ergo cupis fractioni majoribus numeris expreſſæ ſubſtituere aliam æqualem minoribus numeris expreſſam, ſeu *fractionem ad minores terminos reducere.*

Reſolutio. 1. Divide tam numeratorem quam denominatorem fractionis datæ per eundem numerum, ſi quidem id exacte fieri poſſit.

2. Quoti inventi dabunt fractionem priori æqualem, ſed minoribus numeris expreſſam (§. 54).

E. gr. Sit fractio $\frac{9}{36}$ reducenda ad minores terminos; fiet dividendo per 9 $\frac{1}{4}$. Ex fractione $\frac{18}{48}$ fiet dividendo per 6, $\frac{3}{8}$.

56. Nempe fractio data conſiderari poteſt tanquam eſſet inventa ex nova fractione, per eum numerum, per quem diviſio inſtituta eſt, multiplicata (§. 54).

57. *Fractiones duas vel plures ad eandem denominationem reducere*, hoc eſt, invenire fractiones alias datis æquales, ſed quæ eundem habeant denominatorem. **Problema.**

1. Fractionis cujuslibet tàm numerator quam denominator multiplicetur per denominatorem alterius, vel, ſi plures fuerint, per factum ex denominatoribus reliquarum. **Reſolutio.**

2. Fractiones, quæ prodeunt, erunt prioribus æquales (§. 54); habebuntque eundem denominatorem.

E. gr. $5)\frac{2}{3}$ $3)\frac{4}{5}$

$\frac{10}{15}$ $\frac{12}{15}$

vel ſi dantur $20)\frac{2}{3}$ $15)\frac{3}{4}$ $12)\frac{4}{5}$

$\frac{40}{60}$ $\frac{45}{60}$ $\frac{48}{60}$

58.

Problema. 58. *Fractiones duas vel plures addere.*

Reſolutio. 1. Reduc fractiones datas ad eandem denominationem (§. 57).

2. Numeratores omnium adde, & ſummæ ſubſcribe communem denominatorem.

E. gr. Sint addendæ fractiones $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$. fiet

$$7)\frac{2}{5} \quad 5)\frac{4}{7}$$

$$\frac{14 + 20}{35} = \frac{34}{35}$$

Problema. 59. *Fractionem* ($\frac{2}{5}$) *a fractione* ($\frac{5}{7}$) *ſubtrahere.*

Reſolutio. 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem (§. 57).

2. Numerator unius ſubtrahatur a numeratore alterius, & reſiduo ſubſcribatur communis denominator.

E. gr. $5)\frac{5}{7} \quad 7)\frac{2}{5}$

$$\frac{25 - 14}{35} = \frac{11}{35}$$

Problema. 60. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

Mul-

Multiplica inter ſe tam numeratores, quam denominatores fractionum datarum; & habebis quæſitum. Reſolutio.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (§. 55.)

Cum fractio ſit pars duntaxat unitatis (§. 50), *multiplicare fractionem per fractionem* eſt invenire fractionem, quæ toties contineatur in fractione multiplicanda, quoties fractio multiplicans continetur in unitate (§ 33). Quodſi ergo fractio $\frac{2}{3}$ multiplicanda eſt per $\frac{3}{5}$; quærenda primum eſt pars quinta fractionis $\frac{2}{3}$, & hæc deinde ter ſumenda. Enimvero pars quinta fractionis $\frac{2}{3}$ reperitur, multiplicando ſolum denominatorem 3 per 5 ut fiat $\frac{2}{15}$ (§. 52); & fractio hæc ter ſumitur, ſi ſolus numerator multiplicatur per 3, ut fiat $\frac{6}{15}$ (§. 53). Ergo faciendo quod præſcribitur in reſolutione problematis, factum eſt quod petebatur. Demonſtratio.

61. *Si numerus fractus multiplicandus eſt per integrum*, inveniri debet fractus toties major fracto dato, quot unitates complectitur datus integer (§. 33). Ergo *ſolus numerator fractionis multiplicandus eſt per datum integrum* (§. 53). E. gr. ſi $\frac{4}{5}$ multiplicari debet per 3, fiet $\frac{12}{5}$.

62. Si numerator eſt major denominatore, ut in $\frac{12}{5}$ plures partes totius 5 petuntur, quam

totum 5 habeat, nempe 12. unde fractio continet totum vel ſemel vel aliquoties, & ſæpe inſuper unam vel aliquot partes totius. Sic $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$. Tales *fractiones* appellantur *impropriæ*, vel *ſpuriæ*.

63. Ad fractionem impropriam reduci poſſunt omnes numeri integri, ſi iis ſubſcribitur 1. E. gr. $\frac{3}{1}$. Imo numerus quilibet integer per fractiones modis infinitis exprimi poteſt. Eſt enim e. gr. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$ (§. 54.) $= \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$ &c. (§. cit.). Unde etiam *integer quilibet numerus reducitur ad fractionem dati denominatoris*; ſi numerus integer multiplicatur per denominatorem datum, & hic ei ſubſcribitur (§. 54). E. gr. $3\frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.

Problema. 64. *Fractionem per fractionem dividere*, $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$.

Reſolutio & demonſtratio. 1. Reducantur fractiones datæ ad eundem denominatorem (§. 57); cumque hic non ſit niſi earum nomen (§. 51).

2. Numerator fractionis dividendæ dividatur per numeratorem alterius (§§. 46, 47).

E. gr. $5)\frac{3}{4}$ $4)\frac{2}{5}$

$$\frac{15}{20} : \frac{8}{20} = \frac{15}{8}.$$

65. Cum denominator communis (20) nullius hic ſit uſus; numerator autem fractionis dividendæ 15 reperiatur ducendo denominato-

rem

rem fractionis alterius 5 in numeratorem dividendæ priorem 3; & numerator 8 fractionis alterius reperiatur, ſi denominator dividendæ 4 multiplicetur per numeratorem fractionis alterius 2 (§. 57), patet *diviſionem fractionis per fractionem abſolvi* compendio, ſi

1. Diviſor invertatur e.g. ſcribendo $\frac{5}{2}$ pro $\frac{2}{5}$.

2. Inverſus ducatur in fractionem dividendam.

E.gr. Sit $\frac{3}{4}$ dividendum per $\frac{2}{5}$.

Fiet $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

66. Cum $\frac{15}{8}$ ſit fractio impropria (§. 62), diviſione ulteriore reducitur ad hanc $1\frac{7}{8}$ (§. *cit.*).

67. Si numerus quicunque multiplicatur per ſe ipſum, factum inde ortum dicitur *Quadratum*, ſeu *Numerus Quadratus*. Sic ſi fiat $3 \cdot 3 = 9$, erit 9 numerus quadratus: numerus autem ipſe (3) relate ad quadratum ex eo ortum (9) dicitur *Radix quadrata* ſeu *Latus quadrati*. Definitio.

68. Si numerus quadratus multiplicatur per ſuam radicem, e. gr. 9 per 3; factum inde ortum (27) appellatur *Cubus* ſeu *numerus cubitus*; & idem numerus (3), qui relate ad quadratum dicebatur radix quadrata, relate ad cubum (27) dicitur *radix cubica*; ſeu *Latus cubi*. Definitio.

Corollar. 69. Si quadrata vel cubi inter ſe ſunt æquales; etiam radices quadratæ vel cubicæ æquales erunt; & viciſſim, ſi radices ſunt æquales, etiam quadrata vel cubi æquales erunt (§. 36).

Definitio. 70. *Extrahere radicem quadratam* ex numero dato (9), eſt invenire numerum (3), qui in ſe ipſum ductus producat numerum datum (9) (§. 67): *extrahere radicem cubicam* ex numero dato (27) eſt invenire numerum 3, qui, in ſuum quadratum (9) ductus, producat numerum datum (27).

71. Signum extrahendæ radicis eſt $\sqrt{}$. Unde $\sqrt{3}$ ſignificat radicem quadratam ex 3 extrahendam: $\sqrt[3]{3}$ indicat radicem cubicam ex eodem numero 3 extrahendam. Nempe ſignum $\sqrt{}$ præfigitur potiſſimum numeris, quorum exacta radix non datur in numeris. Unde ejusmodi radices appellantur *numeri irrationales*, vel etiam *quantitates irrationales*.

72. Ad extrahendas radices quadratas & cubicas ſervit tabella ſequens.

Rad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Definitio. 73. *Radix* tam quadrata quam cubica dicitur *binomia*, quæ nonniſi duabus notis

tis ſeu partibus ſcribi poteſt; ut 24 radix eſt binomia numeri cubici 13824, numeri quadrati 576 *trinomia*, quæ tribus partibus conſtat; &c. *polynomia* dicitur ſeu *multinomia*, ſi partibus conſtat pluribus quam duabus; ut 243 radix eſt *polynomia* & *trinomia* quadrati 59049.

74. *Quadratum radicis binomiæ* (24) *componitur ex quadrato partis primæ* (20), *quadrato partis ſecundæ* (4), *& facto duplo partis primæ in ſecundam* (2 . 20 . 4). Theorema.

Ut veritatem theorematis agnoſcas, non opus eſt, niſi ut ad ſingula attendas, dum 24 multiplicatur per ſe ipſum, & ſingulis quæ fiunt conveniens nomen adſcribas. Cum enim modus, quo ex numero dato fit quadratum, ſemper ſit idem (§§. 67, 38); quod uno quadrato naſcente obtinet, obtinet in omnibus. Demonſtratio.

E. gr. Cum ſit 24 = 20 + 4, ſi gignitur ex radice 24 numerus quadratus, fiet (§. 38)

20 + 4 *Radix*
20 + 4

4 . 4 *Quadrat. part. prim.*
20 . 4 *Factum ex parte I. in II.*
20 . 4 *Factum ex part. I. in II.*
20 . 20 *Quadratum partis II*

Quadrat.tot. 20 . 20 + 2 . 20 . 4 + 4 . 4
hoc eſt 400 + 160 + 16 = 576

 75. Ter-

Coroll. 1. 75. Terminatur autem quadratum partis primæ (16), cui non adhæret zero, in loco unitatum; factum duplum ex parte una in alteram (160), cui adhæret zero, in loco decadum; quadratum partis ſecundæ (400), cui duplex adhæret zero, in loco centenariorum.

Coroll. 2. 76. Si radix polynomia fuerit, duæ vel plures notæ ſiniſtimæ habentur pro una, & illico patebit *Quadratum radicis cujuscunque componi ex quadratis ſingularum partium, & ex facto duplo partis cujuslibet dexterioris in omnes ipſa ſiniſteriores* (§. 74).

77. Quibus autem totius quadrati locis quærendum ſit quadratum uniuscujusque partis, & unumquodque factum duplum, colligi poteſt ex dictis (§. 75).

Problema. 78. *Ex dato numero* 53824 *radicem quadratam extrahere.*

Reſolutio. 1. Numerus datus dividatur in claſſes, a dextris ſiniſtrorſum, duas cuilibet claſſi aſſignando notas, niſi quod ſiniſtimæ haud raro nonniſi unica cedat. Tot autem partes habebit radix, quot ſunt claſſes (§. 75, 77).

2. Cum in claſſe ſiniſtima quadratum ſiniſtimæ partis radicis reperiatur (§. 75, 77); quæratur in tabella radicum

eum (§. 72) quadratum proxime accedens ad notas claſſis ſiniſtimæ, ita tamen, ut ſit his proxime minus, atque ab iis ſubtrahatur. Radix autem quadrato ex tabella excerpto reſpondens ſcribatur poſt lunulam a dextris, inſtar quoti in diviſione.

3. Radix tota hactenus inventa multiplicatur per 2, & productum ſcribi incipit ſub nota ſiniſtra claſſis ſequentis, & porro ſiniſtrorſum, ſi pluribus notis conſtat. Producto hoc uteris ut diviſore, quotus inventus erit altera pars radicis (§. 75, 77), quæ ſimul & in loco quoti, & ſub nota dextra novæ claſſis collocatur.

4. Per eandem partem radicis recens inventam multiplica ſubſcriptos novæ claſſi & reſiduo ex priore numeros; factum inventum ſubtrahe a nova claſſe ac prioris reſiduo (§. 75, 77).

5. Quodſi juxta regulam tertiam & quartam agas in ſingulis claſſibus, quæ ſuperſunt, tandem reperies radicem integram (§. 74, 76).

E. gr.

```
5, 38, 24 | 232
4 : :
-----------
1 3 8
  4 3
1 2 9
-----------
  924
  462
  924
-----------
    0
```

79. Si numerus datus non eſt exacte quadratus, reſiduo ultimo junge a dextris duas, quatuor, ſex &c. cyphras ſeu o, & repetendo regulas tertiam & quartam (§. 78), reperies partes decimas, centeſimas, milleſimas &c. radicis.

80 *Examen extractionis* rite peractæ ſuppeditat multiplicatio. Si enim radicem inventam multiplicas per ſe ipſam, productum exhibere debet numerum datum; & quidem cum totidem cyphris quot eidem adjunxiſti; ſiquidem perfecte quadratus non fuit, addendum eſt tamen producto reperto reſiduum omnium poſtremum.

E. gr.

E. gr. Sit radix quadrata extrahenda ex 3; cum ternarius non ſit perfectum quadratum, fiet

```
  3          ⎡173
  1          ⎣100   (§. 79).
 ─────────
 2|00|00
  |27|
 1 89
 ─────────
   11 00
     343
    1029
 ─────────
      71
Examen 173
       173
 ─────────
       519
      1211
      173
 ─────────
     29929
        71  reſid. add.
 ─────────
     30000
```

81. Si ex fractione extrahenda eſt radix quadrata, ſpeciatim tam ex numeratore quam ex denominatore extrahenda eſt (§. 70. 60). E. gr. Radix quadrata ex $\frac{16}{25}$ eſt $\frac{4}{5}$.

82. Cum numerus cubicus prodeat ex quadrato per radicem ſuam multiplicato (§. 68), ſi ad ſingula attendis, dum 576 quadratum numeri 24, multiplicas per ſuam radicem 24 ſeu 20 + 4; ſi multiplicationem duntaxat indicas, & factis ſingulis, quæ naſcun- Theorema & demonſtratio.

ſcuntur, conveniens nomen adſcribis, reperies *cubum Radicis binomiæ componi ex cubis ſingularum partium, & ex triplo facto partis primæ in quadratum ſecundæ, nec non ex triplo facto partis ſecundæ in quadratum primæ.*

E. gr. Cubus numeri 24 ſeu 20 + 4 eſt aggregatum ex

I.	20 . 20 . 20	*Cubo partis ſecundæ*
II.	4 . 4 . 4	*Cubo partis primæ*
III.	3 . 4 . 4 . [illegible]	*Trip. facto part. II. in □ Iæ.*
IV.	3 . 20 . 20 . 4	*Trip. facto part. I. in □ IIæ.*

83. Nimirum Quadratum numeri 24 eſt (§. 74)

20 . 20 + 2 . 20 . 4 + 4 . 4 *Quadratum*
20 . 4 *Radix*

Ergo multiplicando quadratum per radicem

4 . 4 . 4	*Cubus part. I.*
2 . 20 . 4 . 4	*Fact. dupl. ex part. II. in □ Iæ.*
20 . 20 . 4	*Fact. ex parte I. in □ IIdæ.*
4 . 4 . 20	*Fact. ex parte II. in □ Iæ.*
2 . 20 . 20 . 4	*Fact. dupl. ex part. I in □ IIdæ.*
20 . 20 . 20	*Cubus partis IIdæ.*

Coroll. 1. 84. Ubi terminetur pars cubi quælibet intelligitur ex adhærente zero ſeu cyphra (0) una vel pluribus, ut in Quadratis (§. 75).

Coroll. 2. 85. Si radix fuerit polynomia, duæ vel plures partes ſiniſteriores conſiderantur inſtar unius, & tum patebit (§. 82, 83) *numerum quemvis cubicum com-*

componi 1. ex cubis ſingularum partium radicis, 2. ex triplo quadrato omnium ſiniſteriorum ſimul in proxime dexteriorem, & 3. ex triplo quadrato unius cujusque dexterioris in omnes ſiniſteriores ſimul.

E. gr. Cubus numeri 324 ſeu 300 + 20 + 4 ſeu 320 + 4 componitur.

I. Ex cubis	300 . 300 . 300 =	27000000
	20 . 20 . 20 =	8000
	4 . 4 . 4 =	64
II. Ex factis	3 . 320 . 320 . 4 =	1228800
	3 . 300 . 300 . 20 =	5400000
III. Ex fact.	3 . 4 . 4 . 320 =	15360
	3 . 20 . 20 . 300 =	360000
	Cubus integer =	34012224

86. Ubi terminetur pars quælibet Cubi intelligitur ex dictis (§. 75) & ex exemplo dato (§. 85).

87. *Radicem cubicam extrahere ex numero quocunque dato.* Problema.

1. Numerus propoſitus dividatur in claſſes a dextris ad ſiniſtram; unicuique claſſi tres aſſignentur notæ, niſi quod claſſis ſiniſtima tribus pauciores habere poſſit. Radix tot habebit partes, quot ſunt claſſes (§. 85, 86). Reſolutio.

2. In

2. In tabella radicum (§ 72) inveſtigetur cubus, qui vel proxime minor eſt claſſe ſiniſtima, vel ipſa claſſis ſiniſtima. Is ſubtrahatur ex eadem claſſe ſiniſtima; radix autem ejus ſcribatur a dextris numeri dati poſt lunulam, ut quotus in diviſione. Et habes partem radicis ſiniſtimam (§. 82).

3. Reſiduo jungatur a dextris ſequens claſſis; hujus autem notæ ſiniſtimæ ſubſcribatur triplum quadratum radicis (totius) hactenus inventæ; quæratur quoties illud in notis ſupra ſcriptis contineatur: quotus erit nova pars radicis jungenda hactenus inventæ a dextris poſt lunulam.

4. Nova parte radicis multiplicantur numeri ſubſcripti, ſeu triplum quadratum radicis (totius nempe, ſi forte plures jam partes habeat) prioris; factum ſcribitur ſub nota ſiniſtima novæ claſſis, & inde porro ſiniſtrorſum (§. 86).

5. Poſtea nova pars radicis multiplicatur per ſe ipſam, & quadrati inventi triplum ducitur in radicem prius inventam (totam ſcilicet, ſi forte pluribus jam partibus conſtat); factum vero ſcribitur ſub nota media

no-

novæ claſſis, & inde porro ſiniſtrorum (§. 86).

6. Demum in tabella radicum (§. 72) quæritur novæ partis radicis cubus, & ſcribitur ſub nota dextima novæ claſſis (§. 86). Tum tria poſtrema facta inventa colliguntur in unam ſummam (§. 82), quæ ex notis numeri cubici ſupraſcriptis ſubtrahitur.

7. Si plures in numero dato ſuperſunt claſſes, jungitur reſiduo a dextris ſequens claſſis, & repetitur operatio juxta præcepta *num.* 3, 4, 5, & 6, donec claſſis nulla ſuperſit (§. 85).

E. gr. Sit extrahenda radix cubica ex 34567, fiet

	34,567(32
Cub. pars II.	27
	7567
	(27)
3 □ *part. II. in I.*	54
3 □ *part. I. in II.*	36
Cub. part. I.	8
Summa	5768
Reſiduum	1799

88. Si numerus propoſitus non eſt perfecte cubicus, junguntur reſiduo tres, ſex, novem &c. cyphræ ſeu (o), & operatio repetitur perinde ac ſi plures claſſes numeri propoſiti ſu-

ſupereſſent; atque tum reperiuntur præterea radicis partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c.

89. *Examen* inſtituitur quadratum radicis inventæ multiplicando per radicem. Quodſi enim inde prodit numerus datus, operatio fuit bene peracta. Si poſt operationem ſuperfuit reſiduum, hoc addendum eſt facto ex radice in quadratam radicis, ut prodeat numerus propoſitus. Si quæſitæ ſunt annexis cyphris (o) partes decimæ, centeſimæ &c. radicis; prodibit numerus propoſitus cum adhærentibus tot cyphris, quot eidem fuerunt annexæ.

90. Si ex fractione radix cubica eſt extrahenda, extrahitur ſeorſim a numeratore, & ſeorſim a denominatore (§. 60, 70).

E. gr. $\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$.

Definitio. 91. Si duo numeri inter ſe comparantur ſubtrahendo minorem a majore; eorum relatio appellatur *Ratio arithmetica*: quodſi comparentur dividendo majorem per minorem, eorum relatio appellatur *Ratio geometrica*, vel *Ratio* ſine addito. Numeri ipſi inter ſe comparati utrobique appellantur *Termini rationis*. Et quidem *Antecedens* dicitur, qui refertur ad alterum; *Conſequens* vero is, ad quem ille refertur.

E. gr.

E. gr. Si ſubtrahitur 2 ex 8, ut reperiatur differentia 6, relatio quam habet 8 ad 2, quod nempe 6 unitatibus excedat binarium, ſeu ab eodem differat, dicitur ratio arithmetica; idem nomen habet relatio binarii ad 8, quod nempe 2 differat ſex unitatibus ab 8. Si vero 8 dividitur 2, ut per quotum 4 intelligatur ab octonario quater contineri binarium, vel binarium quater contineri in 8, relatio hæc octonarii ad binarium vel binarii ad octonarium dicitur ratio geometrica, vel ratio ſimpliciter. In caſu priore, ubi 8 refertur ad 2, ut continens ad contentum, 8 eſt antecedens, 2 conſequens; in caſu autem altero, ubi 2 refertur ad 8, ceu contentum ad continens, 2 eſt antecedens, 8 conſequens.

92. In ratione arithmetica numerus minor oritur ex majore *ſubtrahendo* a majore differentiam terminorum; major ex minore, ſi huic *additur* differentia terminorum. In ratione geometrica Quotus ex diviſione termini majoris per minorem emergens appellatur *Denominator rationis*; oriturque minor terminus ex majore dividendo majorem per denominatorem rationis; major vero oritur ex minore, multiplicando minorem per denominatorem rationis (§. 33, 43). E. gr. In ratione arithmetica ipſius 8 ad 2, differentia terminorum eſt 6, ſeu $8 - 2 = 6$. Eſt autem $8 - 6 = 2$, & $2 + 6 = 8$. In ratione geometrica ipſius 8 ad 2, eſt $8 : 2 = 4$, adeoque denominator rationis 4. Eſt autem $8 : 4 = 2$, & $2 \cdot 4 = 8$.

93.

Definitio. 93. *Rationes* duæ vel plures *arithmeticæ* dicuntur *ſimiles*, quæ eandem habent terminorum differentiam, ut 8 ad 2, & 9 ad 3. Nempe $8 - 2 = 6$, & $9 - 3 = 6$. Unde $8 - 2 = 9 - 3$ (§. 16). *Rationes* duæ vel plures geometricæ dicuntur *ſimiles* vel *eadem*, quæ eundem habent denominatorem ut 8 ad 2 & 12 ad 3. Eſt enim $8 : 2 = 4$, & $12 : 3 = 4$. Unde $8 : 2 = 12 : 3$, ſeu 8 eſt ad 2, ut 12 ad 3. Nempe quoties 8 continet 2, toties 12 continet 3. Rationum duarum ſimilitudo vel identitas appellatur *Proportio*.

94. Si in duabus rationibus ſimilibus terminus ſecundus primæ rationis idem eſt cum termino primo ſecundæ rationis, *Proportio* dicitur *continua*; & terminus utrique rationi communis dicitur *Medius proportionalis*. Quodſi proportio continua fuerit arithmetica, ſcribitur ÷ 12 . 9 . 6; ſi geometrica, fit ∺ 8 . 4 . 2. Eſt nempe $12 - 9 = 9 - 6$ & $8 : 4 = 4 : 2$.

Theorema. 95. *Si fuerint quatuor numeri vel magnitudines arithmetice proportionales; ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ mediorum.*

E. gr. Si $8 - 2 = 9 - 3$

erit $8 + 3 = 2 + 9$

Nam

Nam terminus major primæ rationis 8 oritur, ſi minori 2 additur differentia terminorum 6; ſimiliter terminus major ſecundæ rationis 9 oritur, ſi minori 3 additur differentia terminorum 6 utrobique eadem (§. 92, 93). Summa igitur ex primo & ultimo termino: 8 + 3 æqualis eſt minori termino primæ rationis, terminorum differentiæ, & minori termino ſecundæ rationis, ſeu 2 + 6 + 3; & ſumma ex terminis mediis æqualis 2 + 6 + 3; adeoque ſumma extremorum & ſumma mediorum æqualis eſt eidem tertiæ (2 + 6 + 3): ergo ſunt ſummæ illæ æquales inter ſe (§. 16). *Q. e. d.* Demonſtratio.

96. Si proportio arithmetica fuerit continua ſumma extremorum æqualis eſt medii duplo. Corollar.

E. gr. 12 — 9 = 9 — 6

12 + 6 = 2 . 9 ſeu 9 + 9

97. *Inter duos numeros* (vel magnitudines) *datos medium arithmetice proportionalem invenire.* Problema.

1. Numeri dati addantur. Reſolutio.

2. Summa dividatur per 2. Quotus erit medius arithmetice proportionalis (§. 96).

E. gr. $12 + 6 = 18$. Porro $18 : 2 = 9$ Ergo $12 - 9 = 9 - 6$.

Axioma. 98. *Rationes ſimiles ſeu æquales eidem tertiæ ſunt ſimiles ſeu æquales inter ſe: & rationes rationibus ſimilibus ſimiles, ſunt inter ſe ſimiles.*

E. gr. Si fuerit $6 : 3 = 4 : 2$
$10 : 5 = 4 : 2$

erit $6 : 3 = 10 : 5$

Si fuerit $6 : 3 = 4 : 2$
$10 : 5 = 6 : 3$
$14 : 7 = 4 : 2$

erit $10 : 5 = 14 : 7$

Axioma. 99. *Idem ad æqualia, & æqualia ad æqualia eandem rationem habent.*

Axioma. 100. *Quæ ad idem eandem rationem habent, æqualia ſunt: & ad quæ idem eandem rationem habet, æqualia ſunt.*

Theorema. 101. *Si duo numeri* (5 & 10) *multiplicantur per eundem tertium* (4); *facta* (20 & 40) *eandem inter ſe rationem habent, quam numeri multiplicati.* ſeu $20 : 40 = 5 : 10$, vel $40 : 20 = 10 : 5$.

Demonſtratio. Cum multiplicans utrobique ſit idem (4) per *hypoth.* quoties ſumitur 5 ut prodeat factum 20, toties ſumitur 10, ut prodeat factum 40 (§. 34). Eſt $10 = 5 + 5$. Ergo quoties ſumitur 10, toties ſumitur bis 5. Unde factum ex

10

10 quater ſumto (40) debet eſſe bis factum ex 5 quater ſumto (20), ſeu illud eſt ad hoc, ut 2 ad 1. Sed etiam eſt 10 ad 5, ut 2 ad 1. Ergo 40 : 20 = 10 : 5 (§. 92). Q. e. d.

102. *Nempe* 10 = 5 + 5.

5	10	=	5	+	5
5	10	=	5	+	5
5	10	=	5	+	5
5	10	=	5	+	5
20	40	=	20	+	20

103. *Si duo numeri* (vel quantitates) *per eundem tertium dividuntur: quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ, ſeu quoti eandem rationem habent, quàm numeri diviſi.* Numeri enim diviſi conſiderari poſſunt ut facta ex multiplicatione quotorum per diviſorem ceu numerum eundem orta (§. 33, 43). Corollar.

E. gr. 40 : 4 = 10, & 20 : 4 = 5. Eſt autem 10 : 5 = 40 : 20.

104. *Si quatuor fuerint numeri* (vel quantitates) *geometrice proportionales; factum ſub extremis eſt æquale facto ſub mediis.* Theorema.

E. gr. Si 6 : 3 = 8 : 4
erit 6 · 4 = 3 · 8 = 24.

Demonſtratio. In ratione geometrica terminus major eſt factum ex minore in denominatorem rationis (2) (§. 92). Nempe $6 = 3 \cdot 2$, & $8 = 4 \cdot 2$. Quodſi quatuor termini ſunt proportionales, denominator utriusque rationis eſt idem (§. 93). Quare ſi terminus primus (6) multiplicatur per quartum (4), factum ſub extremis eſt factum ex termino ſecundo in denominatorem rationis (2) & porro in quartum (4). Nempe $3 \cdot 2 \cdot 4$. Et ſi terminus tertius multiplicatur per ſecundum, factum ſub mediis eſt factum ex quarto in denominatorem rationis, & porro in ſecundum ſeu $4 \cdot 2 \cdot 3$. Factores ergo utrobique ſunt iidem; igitur & facta eadem eſſe debent (§. 36). Q. e. d.

Corollar. 105. Quodſi ergo tres numeri vel quantitates fuerint continue proportionales (§. 94.); factum ſub extremis æquale eſt medii quadrato (§. 67).

Theorem. 106. *Si quatuor numeri* vel quantitates *fuerint proportionales, erit etiam* permutando *primus ad tertium ut ſecundus ad quartum.*

E. gr. Si $8 : 4 = 6 : 3$

erit etiam $8 : 6 = 4 : 3$.

Eſt

Eſt enim terminus primus (8) factum ex minore (4) in denominatorem rationis (2), & terminus tertius (6) factum ex eodem denominatore (2) in (3) terminum minorem ſecundæ rationis (§. 92, 93.). Terminus ergo primus & tertius ſunt facta ex multiplicatione terminorum ſecundi & quarti per eundem denominatorem rationis orta. Atqui facta ex multiplicatione duorum numerorum per eundem tertium orta ſunt inter ſe ut numeri multiplicati (§. 101). Ergo terminus primus eſt ad tertium, ut ſecundus ad quartum. Demonſtratio.

107. *Inter duos numeros datos medium geometrice proportionalem invenire.* Problema.

1. Dati numeri per ſe invicem multiplicentur. Reſolutio.

2. Ex facto extrahatur radix quadrata (§. 78). Hæc erit terminus medius geometrice proportionalis (§. 105).

E. gr. Si quærendus medius geometrice proportionalis inter 3 & 12; duc 3 in 12, & habes 36. Radix quadrata ex 36 eſt 6; erit igitur 3 : 6 = 6 : 12. Eodem modo quæritur medius proportionalis inter 4 & 81, nempe 18, inter 5 & 45, nempe 15.

108. *Si factum dividitur per factorem unum, quotus erit alter ex factoribus.* Theorema.

 Fa-

Demonſtratio. Factum dividi poteſt vel per multiplicandum, vel per multiplicantem. Sumamus primo factum dividi per multiplicandum. Quoniam

In facto toties continetur multiplicandus, quoties unitas in multiplicante (§. 33). Si factum dicatur F, multiplicantus M, multiplicans m, erit (§. 93)

I. F : M = m : 1.

Porro in quoto toties continetur unitas, quoties diviſor in dividendo (§. 43.). Ergo ſi factum dividitur per multiplicandum, in quoto toties contineri debet unitas, quoties multiplicandus continetur in facto; igitur ſi quotus dicatur q, erit

II. F : M = q : 1.

Sed eſt etiam F : M = m : 1. *num.* I. ergo rationes m : 1 & q : 1 ſunt ſimiles eidem tertiæ F : M. Atqui rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt ſimiles inter ſe (§. 98); erit ergo

m : 1 = q : 1.

hoc eſt, multiplicans & quotus ex diviſione facti per multiplicandum emergens ad idem 1 eandem rationem habent (§. 93). Sed quæ ad idem eandem rationem habent æqualia ſunt (§. 100).

100). Ergo quotus ex diviſione facti per multiplicandum emergens, æqualis eſt multiplicanti, ſeu

III. *Si factum dividitur per multiplicandum, quotus eſt multiplicans.* Quod erat primum.

Si factum dividitur per multiplicantem, cum in quoto toties contineatur 1, quoties diviſor in dividendo (§. 43); in quoto toties continetur 1, quoties multiplicans in facto. Quare ſi quotus dicatur Q, erit

IV. F : *m* = Q : 1.

Quoniam F : M = *m* : 1 *num.* I. erit etiam permutando (§. 106)

V. F : *m* = M : 1.

Rationes ergo Q : 1 & M : 1 ſunt ſimiles eidem tertiæ F : *m*. Atqui rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt ſimiles inter ſe (§. 98). Ergo

Q : 1 = M : 1.

ſeu multiplicandus, & quotus ex diviſione facti per multiplicantem emergens ad idem 1 eandem rationem habent: atqui quæ ad idem eandem rationem habent, æqualia ſunt. Ergo multiplicandus æqualis eſt quoto ex di-

viſione facti per multiplicantem emergenti, ſeu

VI. *Si factum dividitur per multiplicantem, quotus eſt multiplicandus.*

Quare cum etiam, ſi factum dividitur per multiplicandum, quotus ſit multiplicans per *num.* III. multiplicans vero & multiplicandus ſint factores (§. 54).

Univerſim *ſi factum dividitur per factorem unum; quotus erit alter ex factoribus.* Q. *e. d.*

Problema 109. *Datis duobus numeris invenire tertium geometrice proportionalem.*

Reſolutio. 1. Numerum ſecundum multiplica per ſe ipſum.

2. Factum divide per primum. Quotus erit tertius proportionalis (§. 105, & §. 108).

E. gr. Dantur 3 & 6, quæritur tertius proportionalis; multiplica 6 per 6, ut fiat 36, factum 36 divide per 3, quotus 12 erit tertius continue proportionalis ad 3 & 6; eſt enim 3 : 6 = 6 : 12.

Problema. 110. *Datis tribus numeris* (8, 4, 6,) *invenire quartum geometrice proportionalem.*

Reſolutio. 1. Duc tertium in medium (4 . 6)

2. Productum (24) divide primo (8). Erit quotus (3) quartus proportionalis quæſitus (§. 104. & §. 108).

111. Nempe *ſi factum dividitur per factorem unum, quotus erit alter ex factoribus* (§. 108). Cum ergo factum ſub extremis ſit æquale facto ſub mediis (§. 104), ſi factum ſub mediis dividitur per unum extremorum, quotus erit alter extremorum. Ceterum Reſolutio hujus problematis appellatur regula trium, & regula aurea, ob ampliſſimum uſum quem habet tum in ſcientiis, tum in negotiis vitæ humanæ, ut alibi* fuſiore calamo declaratum eſt.

112. *Datis tribus numeris* (3, 5, 8) *quartum arithmetice proportionalem invenire.* Problema.

1. Adde ſecundum tertio (5 + 8 = 13). Reſolutio.

2. A ſumma (13) ſubtrahe primum (3). Erit reſiduum (10) numerus quæſitus (§. 95).

113. *Duo quævis facta æqualia reſolvi poſſunt in proportionem geometricam ſeu in analogiam, in qua factores facti unius ſunt termini extremi, factores facti alterius ſunt termini medii proportionis.* Theorem.

E. gr. Sint facta æqualia ab & cd (§. 35), dico eſſe $a : c = d : b$
vel $c : a = b : d$

Multiplicentur d & b per idem a, erit $ad : ab = d : b$ (§. 101). Eſt autem $ab = cd$ *per hypoth.* Quare cum idem ad æqualia eandem rationem ha- Demonſtratio.

 beat

* In Tirocinio arithmetico.

beat (§. 99), erit etiam $ad : cd = d : b$. Enimvero ad & cd ſunt facta orta ex quantitatibus a & c per idem d multiplicatis (§. 35): ſed facta ejusmodi eandem inter ſe rationem habent quam quantitates multiplicatæ (§. 101). Ergo eſt $ad : cd = a : c$. Sunt igitur rationes $a : c$ & $d : b$ ſimiles eidem tertiæ $ad : cd$ *per demonſtrata.* Atqui rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt ſimiles inter ſe (§. 98). Ergo $a : c = d : b$. *Q. e. primum.*

Similiter $bc : dc = b : d$ (§. 101); adeoque ob $ab = cd$ ſeu dc *per hypotheſin*, erit etiam $bc : ab = b : d$ (§. 99). Sed $bc : ab = c : a$ (§. 101). Ergo erit $c : a = b : d$ (§. 98). *Q. e. alterum.*

Definitio. 114. Si quatuor fuerint *quantitates* proportionales; extremæ mediis, mediæ extremis dicuntur *Reciprocæ.*

E. gr. Numeri 9, 3, 12, 4 ſunt quatuor numeri proportionales; eſt enim $9 : 3 = 12 : 4$. Erunt igitur numeri 9 & 4 numeris 3 & 12 reciproci.

115. Salva autem manet proportio, quamdiu duæ quæcunque reciprocæ ſunt ambæ mediæ, vel ambæ extremæ. E. gr. quomodocunque loca numerorum 9, 3, 12, 4 permutes, manebit ſemper proportio, dummodo

9 &

9 & 4 ſint ambo medii, vel ambo extremi; ſimiliter manebit proportio, dummodo 3 & 12 ſint ambo medii vel ambo extremi (§. 93. 92.). Unde ſalva eſt proportio in omni numerorum illorum diſpoſitione ſequenti.

9 : 3 = 12 : 4	3 : 9 = 4 : 12
9 : 12 = 3 : 4	3 : 4 = 9 : 12
4 : 3 = 12 : 9	12 : 9 = 4 : 3
4 : 12 = 3 : 9	12 : 4 = 9 : 3

116. Si duo facta ſunt æqualia, eorum factores ſunt reciproci (§. 113). Corollar.

117. Sæpe occurrit tum in matheſi tum in philoſophia modus loquendi, quo duæ quantitates dicuntur eſſe reciproce (vel inverſe) ut duæ quædam aliæ. E. gr. Dicitur pondera duo, ſuſpenſa e vecte ſeu baculo, conſiſtere in æquilibrio, ſi pondera fuerint reciproce (vel inverſe) ut eorum diſtantiæ a fulcro, cui vectis incumbit. Veluti ſi pondus A eſt 30 librarum, pondus B librarum 6, diſtantia ponderis A a fulcro eſt unius ulnæ, diſtantia ponderis B ab eodem fulcro eſt 5 ulnarum; erit

30 *libr.* : 6 *libr.* = 5 *uln.* : 1 *uln.*

ideoque pondus 6 librarum erit in æquilibrio cum pondere 30 librarum, ſi illud 5 ulnis, hoc ulna una diſtat a fulcro. Quare dum dicitur *pondera* A & B *eſſe reciproce ut diſtantias*; ſenſus eſt, gravitatem & diſtantiam ponderis unius eſſe reciprocas gravitati & diſtantiæ ponderis alterius (§. 114); ſeu ut pondus A eſt ad pondus B, ita eſſe diſtantiam ponderis B ad diſtantiam ponderis A; ideoque quæ in A

cons

conſiderantur reciproca eſſe iis, quæ in B conſiderantur. Nimirum ſi gravitas ponderis A dicitur gA, gravitas ponderis B autem gB, diſtantia ponderis A ſi fuerit dA, ponderis B diſtantia autem dB, erit

$$gA : gB = dB : dA$$

vel $$gB : gA = dA : dB$$ (§. 114.).

GEOMETRIA
ELEMENTARIS.

1. *Geometria* eſt ſcientia magnitudinis eorum, quæ extenſionem limitatam habent. Definitio.

2. Triplex in corporibus, quæ ſub ſenſus cadunt, deprehenditur extenſio; alia eſt ſecundum longitudinem, ut in filo, quod decem, viginti, aut 100 ulnas longum dicitur; alia ſecundum latitudinem & longitudinem ſimul, ut ſi quæritur quot paſſus ſit longus ager, quot latus; alia ſecundum longitudinem, & latitudinem atque profunditatem ſimul; ut ſi quæritur moles aliqua terrea quadrangularis quot numeret pedes longitudinis, quot pedes latitudinis, quot pedes profunditatis. Geometria docet limites magnitudinis harum extenſionum invenire, ita ut certi ſimus, tot non plures nec pauciores numerari pedes in turris ejusdam e. g. altitudine &c.

3. Quamvis autem, quæ videmus, corpora in longitudinem, latitudinem, ac profunditatem ſimul extenſa ſint, mens tamen noſtra vel ad ſolam longitudinem attendere poteſt, vel ad longitudinem & latitudinem ſimul, vel tam ad longitudinem, quam ad latitudinem & profunditatem.

4. Lon-

Definitio. 4. Longitudo ſine latitudine & profunditate conſiderata dicitur *Linea*; longitudo & latitudo ſimul ſine profunditate dicitur *Superficies*; longitudo ſimul cum latitudine ac profunditate conſiderata appellatur *Solidum* ſeu *Corpus mathematicum*.

5. Sic in filo tenuiſſimo non conſideratur niſi longitudo; unde lineam perbene repræſentat: in agris, pannis, linteis &c. conſideratur duntaxat eorum longitudo & latitudo; unde ideam ſuperficierum animo inſinuare queunt: in mole terrea quadrangulari vel in libro prægrandi conſideratur longitudo, latitudo, & profunditas ſimul; unde Solidorum notioni illuſtrandæ ſerviunt.

6. Illud quoque notandum, quæ nunc profunditas appellatur, alias altitudinem, alias craſſitudinem dici; quotieſcunque etiam rei cujusdam una ſola extenſio conſideratur, eam inſtar lineæ haberi. Sic altitudo turris inſtar lineæ, adeoque inſtar longitudinis conſideratur.

7. Tria hæc extenſionum genera, nempe longitudo, latitudo, & profunditas dicuntur tres magnitudinis dimenſiones. Unde linea dimenſionem habet unam, ſuperficies dimenſiones habet duas, ſolidum tres. Quamvis autem in rebus mundi hujus aſpectabilis nunquam exiſtat dimenſio una ſine reliquis duabus, ſæpe tamen unius duntaxat cognitione opus eſt; e. g. quanta ſit latitudo foſſæ, aut fluvii, quin præterea ſemper ſcitu neceſſaria ſit pro-

fun-

funditas foſſæ aut fluvii. Præterea ſicut limites lineæ ſecundum longitudinem ſunt puncta, ita limites ſuperficiei ſunt lineæ, limites ſolidorum ſunt plures ſuperficies. Secundum latitudinem linea non habet limites ſeu terminos a linea diverſos; adeoque ſecundum latitudinem linea terminat ſe ipſam.

8. Lineæ extremum ſeu limes dicitur *Punctum*. Definitio.

9. Cum linea ſit longitudo omnis latitudinis vel profunditatis expers (§. 4); punctum vero ſit lineæ extremum (§. 8); *punctum omni latitudine & profunditate deſtituitur.* Coroll. 1.

10. Quodſi punctum longitudine non careret, linea eſſet (§. 4), adeoque extenſio initio & fine non deſtituta (§. *cit.*), adeoque extrema haberet, quæ denuo eſſent puncta (§. 8); atque hoc ipſum de his quoque punctis, & rurſus de aliis aliisque novis punctorum punctis in infinitum dicendum eſſet; ne igitur progreſſus fiat in infinitum, *punctum omni longitudine deſtitutum concipi debet.* Coroll. 2.

11. *Punctum* igitur *omni caret extenſione* (§§. 9, 10, 2). Coroll. 3.

12. Quare cum Geometræ non conſiderent niſi partes extenſas (§. 1), Coroll. 4.

pun-

punctum & omnibus partibus caret, & *pars lineæ neutiquam eſt* (§. 11, 2).

Coroll. 5. 13. *Linea* ergo *non componitur ex punctis* tanquam partibus, ſed partes lineæ ſunt lineæ aliæ minores, in quas dividi poteſt.

14. Cum nec imaginatio nec manus noſtra effingere poſſit quidpiam omni extenſione deſtitutum, punctum vero omni extenſione deſtituatur (§. 11), punctum nec imaginari poſſumus, nec in charta aut campo manu vel inſtrumento deſignare. In praxi igitur geometrica theoriæ perfectionem nunquam aſſequimur; curandum tamen, ut quam poſſumus ſubtilia ſint puncta. Porro ſicut linea non componitur ex punctis tanquam partibus, ita nec ſuperficies ex lineis, nec ſolidum ex ſuperficiebus; quamvis lineæ ſuperficierum, ſuperficies ſolidorum ſint limites, ut puncta linearum; ſed ſuperficies continet alias ſuperficies minores ceu partes, ſolidum ſolida alia minora.

Definitio. 15. *Similia* dicuntur, quæ nulla re differunt niſi forte magnitudine.

Signum ſimilitudines eſt ∽.

Axioma. 16. *Similia eidem tertio ſunt ſimilia inter ſe.*

Coroll. 1. 17. Cum ſimilia magnitudine ſola differre poſſint, unum poteſt eſſe majus vel minus altero, cetera autem qua-

quæcunque quæ conveniunt uni, conveniunt quoque alteri; & quæ dici poſſunt de uno, dici quoque poſſunt de altero.

18. E. gr. imago imagini ſimilis eſt, ſi quæcunque deprehenduntur in una, deprehenduntur quoque in altera; quam rem repræſentat una, eandem repræſentat altera; quibus coloribus, qua lucis & umbræ viciſſitudine, quo partium ſitu & ordine res pingitur in una, iisdem pingitur in altera &c.

19. *Similia & eandem magnitudinem habere poſſunt, & diverſam.* Coroll. 2.

20. Nimirum quæ eandem magnitudinem habent, æqualia ſunt; ea vero, in quibus reliqua omnia, quæ magnitudo non ſunt, eadem ſunt ac minime diverſa, dicuntur ſimilia. Duæ ergo imagines ſimiles poſſunt eſſe ejusdem magnitudinis, poteſt quoque una quantumvis eſſe major vel minor altera.

21. Quodſi *ſimilia* fuerint *inæqualia*, *magnitudine diſcernuntur*; ſi *æqualia* fuerint, nullum in iis diſcrimen intrinſecum reperitur, adeoque *diſcerni nequeunt niſi per extrinſeca*, nempe vel per loca diverſa, vel tempora diverſa, quibus exiſtunt, vel exſtiterunt. Coroll. 3.

22. Cum in punctis nihil diſcerni poſſit, quo unum differat ab altero (§§. 11, 8); *puncta omnia ſunt ſimilia* (§. 15). Coroll. 4.

Definitio. 23. *Linea recta* dicitur, cujus pars quæcunque eſt toti lineæ ſimilis.

Tab. I. Fig. 1. 24. E. gr. AB eſt longitudo, in qua nec latitudinem nec profunditatem conſideramus; eſt ergo AB linea. Porro quamcunque partem ex AB mente tua ſeparaveris, nullum intrinſecum diſcrimen deprehendes inter ipſam & totam lineam AB, excepta ſola magnitudine; pars enim eſt minor toto. Eſt ergo pars quæcunque lineæ AB toti lineæ AB ſimilis. Igitur AB eſt linea recta.

Corollar. 25. Cum recta quælibet tanquam pars a recta majore reſciſſa conſiderari poſſit; *lineæ rectæ omnes inter ſe ſunt ſimiles* (§. 23, 16).

26. Quomodo ope regulæ ad puncta A & B applicatæ ſtylo plumbeo, calamo, aut alio inſtrumento ducatur recta quæcunque AB, pervulgatum eſt. In ligno vel ſaxo filum nigro, rubro, aliove colore infectum & ad extrema lineæ ducendæ firmiter applicatum in medio digitis attollitur, moxque iterum demittitur. In campo linea recta deſignatur baculis, in ejus extremitate utraque defixis. Quodſi linea longior ſit, ubi duo baculi in lineæ extremis defixi fuerint, tertius aut plures alii cum iisdem in eadem recta deſiguntur, ſi oculo in primum directo ceterorum nullus appareat.

27. Si magnitudinem quandam metimur, minorem quandam, quæ aliquoties ſumta alteram ſuperare valet, pro menſura ſumimus. E. gr. Longitudinem panni cujusdam menſuri longitudinem aliam, ulnæ v. g. pro menſura ſu-

ſumimus; ulna nempe aliquoties ſumta longitudinem panni ſuperare valet. Electa autem menſura, dum metimur, porro inveſtigamus, quoties menſura in menſurando contineatur: e. gr. quot ulnas longitudo panni contineat. In geometria linea recta certæ cujusdam longitudinis pro menſura ſumitur, quæ *pertica* appellatur; pertica dividitur in decem pedes, unde pertica dicitur alio nomine *decempeda*; pes porro dividitur in 10 digitos, digitus in 10 lineas.

28. Diviſio & ſubdiviſio in 10 maxima affert commoda, cum plures menſuræ ſunt addendæ, ſubtrahendæ, multiplicandæ vel dividendæ; nam menſuræ longitudinum eodem modo, quo numeri vulgares, tractari poſſunt. Unde optandum fuerat, ut menſuræ omnes & pondera, exemplo Sinenſium, imo & monetarum valores &c. ad decimalem ejusmodi progreſſionem initio fuiſſent revocati.

29. Sed multis locis alia longe diviſio eſt introducta; ſic in provinciis rhenanis pes dividitur in 12 digitos, digitus in 12 lineas. Pes quoque pariſinus, qui idem eſt per totam Galliam, dividitur in 12 digitos, digitus in 12 lineolas, lineola in 10 particulas. Unde pes integer pariſinus continet particulas 1440.

30. Deſignantur perticæ ſeu decempedæ per circellum ſeu cyphram (o), pedes per lineolam unam ('), digiti per duas (''), lineolæ per tres ('''), partes decimæ unius lineolæ per (iv), partes centeſimæ unius lineolæ per (v). E. gr. Si longitudo agri fuerit 15 decempedarum, pedum 6, digitorum quinque & 7 lineolarum, ſcribimus $1\overset{o}{5}\,\overset{'}{6}\,\overset{''}{5}\,\overset{'''}{7}$.

Signa nempe hæc, & hæ notæ indicent, quot cyphras cum unitate præfixa haberet denominator fractionis, ſi quidem partes decempedæ fractione velles exprimere. Sic ſi fractione velles deſignare pedes ſex, digitos tres, & quinque lineolas, ſcriberes $\frac{635}{1000}$. Nempe decempeda habet mille lineas, centum digitos & decem pedes. Unde

$\overset{\prime}{6} = \frac{6}{10}$, $\overset{\prime\prime}{3} = \frac{3}{100}$, $\overset{\prime\prime\prime}{5} = \frac{5}{1000}$ unius decempedæ.

Problema. Tab. I*. Fig. 2. 31. Rectam lineam in charta metimur ope menſuræ, quam repræſentat Fig. 2. Tab. I*.

Reſolutio. Quæ ita paratur: Ducta recta AB circino ad arbitrium modice aperto ex A verſus C reſecantur 10 partes æquales; hæ vel digitos vel pedes deſignare poſſunt; numeri ordine retrogrado adſcribuntur, ut figura oſtendit. Deinde capitur circino totum intervallum AC, (quod 10 digitos ſeu pedem, vel 10 pedes ſeu decempedam deſignabit), & transfertur ex C verſus B, quoties libuerit, adſcribunturque numeri eo ordine, quem figura oſtendit. Tab. I*. Fig. 1. Igitur ſi proponitur metienda linea *ab* 1) circini pes unus figitur in *a*, pes alter autem dimovetur dum attingat *b*. 2) Tum circinus transfertur in menſuram AB, unoque ejus pede collocato in fine cujusdam decempedæ e. g. in 2, attenditur

tur quem numerum inter partes lineolæ A C attingat pes circini alter e. gr. 7. Quodſi id fiat, deſignabit linea *ab* lineam quæ ſit 2 7 vel ſi diviſiones lineolæ A C deſignent digitos, deſignabit linea *ab* lineam, quæ ſit 2 7.

32. Datur quidem pro lineis etiam in charta metiendis menſura alia artificioſior Tab. V. Fig. 81; ſed de ea nondum dici poſſunt, quæ hic ſatis intelliguntur. Tab. V. Fig. 81.

33. In campo non æque facile eſt metiri lineas. Metimur eas optime per catenas menſorias, vel baculos menſorios, ubi multa cautione opus eſt; ſed qui praxin geometricam in campo exercere vult, is lectis inſtitutionibus geometricis legat Opus Geodæticum Zollmanni, cui titulus: Zollmanns (Joh. Wilh.) Anleitung zur Geodæſie, oder practiſchen Geometrie. Mature monendi ſunt tirones, quibus præterea in praxi opus ſit, ne notitia principiorum elati audaciores fiant cum proprio & aliorum damno.

34. Pedis longitudo non ubique eadem eſt aſſumta. Sic talium particularum, qualium pes pariſinus continet 1440, pes romanus & ſuecicus continet 1320, londinenſis 1350, rhenanus $1391\frac{3}{10}$, norimbergenſis $1346\frac{3}{4}$, id quod fide Cl. J. G. Eiſenſchmidii in diſquiſitione nova de ponderibus & menſuris vet. Rom. Græc. & Hebr. aſſerimus. Eſt ergo pes pariſinus ad londinenſem ut 16 ad 15, ad romanum ut 12 : 11, ad rhenanum ut 14400 : 13913

 (vel

(vel ubi minus accurata cognitio ſatisfacit, aſſumi poteſt cum Picardo ratio pedis pariſini ad rhenanum ut 1440 : 1392 ſeu dividendo per 48 (§. 103 *Arith.*) ut 30 : 29) ad ſinicum ut 639 : 676, fide Beyeri in muſæo ſinico.

Problema. 35. *Data ratione, quam habet pondus vel menſura, e. g. pes regionis A ad pondus vel menſuram, e. g. pedem regionis B, invenire quot pedes regionis B conficiat datus numerus pedum regionis A.*

E. gr. Ex turri bononienſi Aſinellorum P. Ricciolus demittebat globos cretaceos, ut experimentis confirmaret leges, ſecundum quas augetur celeritas motus in gravibus decidentibus. Altitudo coronidis, unde fiebat initium motus, erat pedum romanorum 280. Quæritur quot pedes pariſinos eadem altitudo impleverit, data ratione pedis romani ad pariſinum ut 1320 : 1440, ſeu ut 11 : 12.

Reſolutio. Fiat applicatio regulæ trium hoc modo:

1. Tertio loco ſemper ponatur numerus reſpondens menſuræ convertendæ e. g. 280 ped. rom.

2. Inter numeros exprimentes rationem datam ille primo loco ponatur, qui reſpondet menſuræ inveniendæ, e. gr. 12. nam cum ſit pes romanus ad pariſinum ut 11 ad 12, numerus 12 reſpondet pedibus pariſinis, adeo-

adeoque menſuræ nunc quærendæ. Igitur

12 : 11 = 280
11

12)3080(256 $\frac{8}{12}$ h. e. 256′ 8″.
68
80

Quoniam pes romanus eſt ad pedem pariſinum ut 11 ad 12 *per hypotheſin* (§. 34); quatuor quantitates proportionales ſunt 11, 12, pes rom. & pes pariſinus ſeu eſt 11 : 12 = *pes rom.* : *ped. pariſ.* (§. 93 *Arith.*). Sed ſi quatuor fuerint quantitates proportionales, factum ſub extremis eſt æquale facto ſub mediis (§. 104 *Arith.*); ergo 11 pedes pariſini æquales erunt 12 pedibus romanis. Quodſi ergo dicatur: 12 pedes romani æquales ſunt 11 pedibus pariſinis, quot pedibus pariſinis æquales ſunt 280 pedes romani? quartus numerus proportionalis per regulam trium inventus id oſtendet (§. 110. *Arith.*). Debet igitur numerus 12 poni loco primo, 11 ſecundo, 280 tertio, ut quartus per regulam auream inveniendus oſtendat quæſitum. Q. e. d. Demonſtratio.

36. *Linea curva* dicitur, cujus partes ſunt toti diſſimiles, ſeu quæ recta non eſt. Definitio.

Tab. I. Fig. 2. 37. E. g. CD eſt linea, quæ quater deorſum, quater ſurſum tendit, nunc magis nunc minus; modo majore diſtantia ſupremorum aut infimorum punctorum inter ſe, modo minore: quas diſtantias circino metiri & per lineas rectas repræſentare licet. Quæ autem hac ratione in tota curva CD diſcernis, ea non æque deprehendes in partibus lineæ CD; igitur etſi nullam magnitudinis rationem habeas, multa tamen erunt alia in partibus lineæ CD, alia in tota linea CD; partes ergo lineæ CD toti CD non ſunt ſimiles (§. 15.); linea ergo CD non eſt recta (§. 23), ideoque curva (§. 86).

Definitio. 38. *Planum* ſive *ſuperficies plana* dicitur, ex cujus quolibet puncto ad quodlibet aliud ejus punctum recta duci poteſt in eadem ſuperficie; ita ſcilicet ut ſingula rectarum hujusmodi puncta, non extra, ſed in ipſa ſuperficie ſint ſita.

Tab. I. Fig. 7. & ſeqq. 39. Plana ſive ſuperficies planas repræſentant figuræ omnes a ſeptima usque ad vigeſimam Tabula prima Geometriæ.

Definitio. 40. Curvarum in numero eſt peripheria circuli. Nempe *Circulus* dicitur planum, quod ita claudit linea in ſe rediens, ut ex ſingulis hujus punctis A, E, F, C, D &c. ductæ rectæ ad punctum quoddam intermedium B ſint inter ſe æquales. Linea curva in ſe rediens, quæ circulum undique clau-

dit,

dit, *peripheria circuli* appellatur, vel *circumferentia.* Si definitionem circuli geneticam deſideras, en illam! *Circulus* deſcribitur, ſi recta BD circa punctum fixum B in plano movetur e. g. per C, F, E, A &c. donec ad idem punctum D, unde diſceſſerat, revertatur. Punctum B appellatur *Centrum circuli.*

41. Inſtrumentum, quo circulus in charta deſignatur, *circinus* appellatur. Ad circulos majores deſignandos utimur filo, funiculo, Pertica &c. cujus extremum unum figitur, alterum una cum creta, ceruſſa, ſtylo plumbeo aut ferreo movetur in orbem.

42. Peripheria circuli ſive majoris ſive minoris dividitur in partes 360; qui gradus appellantur. Eſt ergo *gradus* pars peripheriæ trecenteſima ſexageſima. Gradus porro dividitur in 60 minuta prima, minutum primum in 60 minuta ſecunda, minutum ſecundum in 60 minuta tertia, atque ita porro. Pars autem peripheriæ quantacunque appellatur *Arcus.* Unde arcus diſtinguuntur per rationem quam habent ad peripheriam; ſeu per hoc, quod tanta & non alia pars ſint ſuæ peripheriæ, tot gradus &c. contineant, non plures nec pauciores. Definitio.

43. Quamvis autem non ſine ratione peripheria circuli diviſa ſit in gradus ſeu partes 360, quia numerus 360 accurate dividi poteſt per multos numeros, ut per 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 &c.; multo tamen commodior fuiſſet diviſio & ſubdiviſio ſecundum progreſſionem decimalem, quam tenent in numeris millenarii, centenarii, decades, unitates.

44. Gradus perinde ac decempedæ denotantur per circellum (°), minuta prima per lineolam (′), minuta ſecunda per duas (″), minuta tertia per tres (‴). Atque ita porro.

Definitio. 45. Linea recta AC ex uno peripheriæ puncto A ad punctum aliud peripheriæ C per centrum B ducta, appellatur *Diameter circuli.*

Tab. I. Fig. 19.

Definitio. 46. Recta AB ex puncto peripheriæ A ad centrum B ducta, appellatur *Semidiameter*, vel *Radius* circuli.

47. Radii quoque ſunt DB, & CB. Ceterum brevitatis gratia linea recta nonniſi Recta dicitur: & quamdiu eadem figura ejusdem tabulæ retinetur, non opus eſt eam iterato adſcribi ad marginem.

Corollar. 48. Radii ejusdem circuli ſunt rectæ ex puncto quodam peripheriæ ad centrum ductæ (§. 46); ſed rectæ ex puncto quocunque ejusdem peripheriæ ad centrum ductæ ſunt inter ſe æquales (§. 40); ergo *Radii ejusdem circuli ſunt inter ſe æquales; & rectæ æquales poſſunt eſſe radii ejusdem circuli.*

49. Qua-

49. Quare cum ſit AB = BC (§. 48); radius eſt dimidia pars diametri. Unde etiam Semidiameter appellatur.

50. Recta ex puncto peripheriæ ad punctum aliud peripheriæ ducta, appellatur *Chorda* ſeu *Subtenſa*. Definitio.

51. Eſt ergo recta EF, quæ a puncto peripheriæ E ad punctum peripheriæ F ducitur, chorda ſeu ſubtenſa, nempe recta EF ſubtendit arcum EF, eſtque hujus chorda.

52. Quoniam diameter quoque eſt recta, quæ a puncto peripheriæ ad punctum aliud peripheriæ ducitur (§. 45); diameter quoque eſt chorda (§. 50); ſed cum diameter præterea per centrum duci debeat (§. 45); *diameter eſt chorda per centrum tranſiens.* Corollar.

53. Pars circuli chorda EF & arcu EF clauſa ſeu comprehenſa appellatur *Segmentum circuli.* Et quidem *ſegmentum majus* dicitur quod ſemicirculo majus eſt, ut pars circuli, quam comprehendit chorda EF, & arcus ab E per A, D, C, ad F tendens: *ſegmentum minus* appellatur, quod ſemicirculo minus eſt, ut circuli pars altera, quam chorda EF, & arcus inferior EF comprehendit. Definitio.

54. Pars circuli (DBC) quam comprehendunt duo radii BD & BC at- Definitio.

que

que arcus inter eos interceptus DC, appellatur *Sector circuli*.

55. Ad obſervationes aſtrorum adhibentur inſtrumenta, quæ ſectores appellantur; in quibus deſcribendis commemorandum eſt, & quot pedes, digitos &c. longitudo radii complectatur, & quot graduum ſit arcus.

Definitio. Tab. I. Fig. 4. 56. Duarum linearum (AB, AC) in eodem puncto (A) concurrentium inclinatio ad ſe invicem *Angulus* dicitur. Duæ lineæ in eodem puncto concurrentes (AB, AC) appellantur *Crura anguli*; punctum vero concurſus (A) *anguli Vertex* dicitur. Quodſi anguli crus utrumque eſt linea recta, *angulus* appellatur *rectilineus*: ſi crus utrumque eſt linea curva, *angulus* dicitur *curvilineus*, ut ſi duo circuli ſe interſecant, vel duo arcus diverſorum circulorum; ſi crus unum eſt linea recta, alterum curva, ut in angulis CDB, vel DCB *angulus* dicitur *mixtilineus*. Tab. I. Fig. 19.

Fig. 4. Tab. I. 57. Angulus denotatur vel unica litera (A) ad anguli verticem adſcripta; vel tribus literis (BAC, vel CAB), ita ut medium ſemper locum obtineat litera vertici adſcripta. Sæpe etiam angulus denotatur litera majore A vel minore *b* angulo prope verticem inſcripta. Tab. II. Fig. 38.

Fig. 4. Tab. I. 58. Anguli magnitudinem ſeu quantitatem metimur arcu (BC vel *bc*) ex anguli vertice (A) inter ejus crura (AB, AC) deſcripto. Nempe quot

quot gradus vel minuta continet arcus BC vel bc, tot graduum vel minutorum dicitur angulus A.

59. Quot gradus continent arcus inter crura anguli interceptus exploratur in charta ope inſtrumenti transportatorii (Transporteur), ſeu ſemicirculi in gradus 180 diviſi. Nempe centrum inſtrumenti B applicatur vertici anguli B ita, ut latus interius regulæ B C radat anguli crus unum BC; tum enim crus alterum B A in inſtrumento ſignabit numerum graduum, (e. g. 60), quos arcus circuli inter crura interceptus A C continet; adeoque patet anguli quantitas (§. 58). Ex hoc ipſo autem inſtrumento & ſequente ad oculum patebit perinde eſſe ſive radio minore A*b* deſcribas arcum *bc*, ſive radio majore AB deſcribas arcum majorem BC; quot enim gradus peripheriæ circuli minoris continet arcus minor *bc*, totidem gradus peripheriæ circuli majoris continebit arcus B C. Idem patebit clarius ſi inſtrumento modo majore, modo minore metiaris angulum eundem. Accuratius idem demonſtrabitur deinceps. Tab. I. Fig. 21. Tab. I. Fig. 4.

60. In campo defigitur in anguli dimetiendi vertice pes inſtrumenti, quod *Aſtrolabium* appellant, conſtans ex ſemicirculo in gradus & minuta diviſo, atque ex regula DE circa centrum B mobili & dioptris D & E vel etiam teleſcopio inſtructa. Regula fixa A C pariter vel dioptris A & C vel teleſcopio inſtructa ſit oportet. Baculis in cruris utriusque extremitate defixis inſtrumentum ita collocatur, ut ejus centrum B accurate immineat vertici anguli dimetiendi, regula autem immobilis A C per dioptras A & C dirigitur ad baculum in extre- Tab. I. Fig. 22.

mi-

mitate cruris unius defixum; tum inſtrumento immoto regula mobilis DE tamdiu ſola movetur, dum per dioptras D & E baculus in extremitate cruris alterius defixus conſpici poſſit; arcus tum inter regulas, qua baculos reſpiciunt, interceptus indicat quot gradus & minuta compleĉtatur angulus, cujus menſura quæritur (§. 58).

Corollar. 61. Inclinationes linearum ſeu angulos diſtinguimus ſeu diſtincte cognoſcimus per arcus inter angulorum crura interceptos (§. 58); arcus autem diſtinguimus per rationem quam habent ad peripheriam, cujus ſunt partes (§. 42); ergo anguli diſtinguuntur per rationem arcuum ex vertice inter crura deſcriptorum ad peripheriam; hæc ſi fuerit eadem, anguli ſimiles ſunt (§. 15), & quot gradus & minuta &c. continet arcus inter crura unius interceptus, tot gradus & minuta contineře quoque debet arcus interceptus inter crura alterius (§. 42, 59), adeoque anguli quoque æquales ſunt (§. 58). Igitur *anguli ſimiles ſunt æquales, & anguli æquales ſunt ſimiles.*

Definitio. Tab. I. Fig. 3. 62. Si anguli (ABC) crus unum (CB) producitur ultra verticem (B) (in D), *angulus* qui oritur (ABD) dicitur *deinceps poſitus*, nempe priori ABC. *Angulus contiguus* vel *adjacens* appellatur, qui

qui cum altero eundem habet verticem & crus unum commune. Sic *Tab. II. Fig.* 43 anguli *g* & *b* ſunt contigui. Habent enim eundem verticem, nempe punctum C, & crus unum AC commune.

Anguli deinceps poſiti omnes habent eundem verticem, & crus unum commune; ergo ſunt contigui vel adjacentes; non tamen qui contigui ſunt, etiam propterea ſunt deinceps poſiti. Sic anguli *g* & *b* ſunt contigui, non tamen ſunt deinceps poſiti.

63. *Angulus rectus* dicitur, cui deinceps poſitus æqualis eſt, ut ABC vel ABD. Definitio. Fig. 3. Tab. I.

64. *Angulus obliquus* dicitur, cui deinceps poſitus inæqualis eſt; ſeu qui rectus non eſt; ut GCE, vel GAH; eſtque vel angulo recto major, ut GAH, & appellatur *angulus obtuſus*, vel recto minor, ut GCE, & dicitur *angulus acutus*. Definitio. Tab. I. Fig. 6.

65. *Anguli verticales* dicuntur, quorum alter oritur utroque crure alterius ultra verticem producto. Ut anguli C & D, item A & B. Definitio.

66. Nempe anguli C crura ſunt GC, EC; vertex eſt C. Quodſi crus GC producitur ultra C in F & crus EC in H, oritur angulus D;

D; oritur igitur angulus D utroque crure anguli alterius C ultra verticem producto; ſunt ergo anguli C & D verticales: ſeu *ad verticem oppoſiti.*

Definitio. 67. *Linea* (AB), quæ cum altera (CB vel DB) efficit angulum rectum (B), dicitur ad eam *perpendicularis* ſeu *normalis*.
Tab. I. Fig. 3.

68. Sic AB eſt perpendicularis ad BC, & eſt perpendicularis ad BD; viciſſim BC eſt perpendicularis ad AB, & CB perpendicularis ad AB.

Definitio. Tab. I. Fig. 7. 69. *Triangulum* (ABC) eſt planum tribus lineis terminatum, ſeu clauſum. Quodſi tres illæ lineæ fuerint rectæ, dicitur *triangulum rectilineum*; ſi tres fuerint curvæ, *triangulum curvilineum*; ſi duæ rectæ fuerint, una curva (ut DBC Tab. I. Fig. 19) vel duæ curvæ una recta, dicitur *triangulum mixtilineum*. Lineæ triangulum terminantes dicuntur etiam *latera trianguli*.

70. In Geometria hac elementari, quoties ſimpliciter *triangulum* dicitur ſine addito, non intelligitur niſi rectilineum. Signum trianguli ſolet eſſe hoc △.

Definitio. 71. Quodſi trianguli cujuscunque latera fuerint inter ſe æqualia, dicitur *triangulum æquilaterum* (ut ABC Tab. I. fig. 10); ſi duo duntaxat trianguli latera

ra fuerint æqualia (ut A B C Tab. I fig. 11), dicitur *triangulum æquicrurum*, vel *Iſóſceles*; ſi tria fuerint inæqualia *triangulum ſcalenum* appellatur, ut A B C Tab. I fig. 7.

72. Oritur triangulum, ſi crura anguli connectas recta linea. Sic Tab. I fig. 5, ſi anguli B crura B A, B C connectis ducendo rectam ex A in C, orietur triangulum. Definitio.

73. Si angulus, cujus crura connectis linea recta, fuerit rectus, oritur *triangulum rectangulum* (ut B A C Tab. I fig. 5); ſi obtuſus; oritur *triangulum obtuſangulum* (ut D E F fig. 8). Triangulum, (ut F G H fig. 9), cujus omnes anguli ſunt acuti, eſt *triangulum acutangulum*. In triangulo rectangulo B A C (Tab. I fig. 7) latus B C angulo recto A oppoſitum appellatur *Hypothenuſa*; latera autem B A, C A, quæ ſunt crura anguli recti, appellantur *Catheti*. Definitio.

74. *Congruere* dicuntur, quorum termini ſeu limites omnes coincidunt, ſi illa ſibi mutuo applicantur. Definitio.

75. E. g. Rectarum limites ſeu termini ſunt puncta ſecundum longitudinem nempe; ſecundum latitudinem recta ipſa ſui terminus eſt (§. 4, 7). Igitur recta B D congruere dicetur rectæ A C, ſi B D ſuperimponi ſeu applicari po- Tab. I. Fig. 8.

 teſt

teſt rectæ AC, ita, ut punctum B cadat in A, punctum D in C, & recta BD in rectam AC. Similiter ſuperficierum e. g. triangulorum limites ſunt lineæ (§. 7), quibus ſpatium triangulare undique clauditur. Igitur triangula GFH & ABC dicerentur congruere; ſi GFH ſuperimponi ſeu applicari poſſet triangulo ABC; ita; ut recta GF cadat in rectam AB (h. e. ut punctum G cadat in A, punctum F in B, recta GF in rectam AB), recta FH cadat in rectam BC, & recta GH in rectam AC; ipſum triangulum GFH cadat in triangulum ABC; cum triangulum profunditate careat, adeoque ſecundum altitudinem nihil concipi poſſit a ſuperficie diverſum, ideoque ſecundum profunditatem terminet ſe ipſum.

Tab. I. Fig. 9. & 10.

Axioma. 76. *Rectæ æquales congruunt, & quæ congruunt, ſunt æquales.*

Axioma. 77. *Lineæ & plana quæ congruunt ſunt æqualia.*

Tab. I. Fig. 2. Fig. 9. & 10. Fig. 19. & 20.

78. E. g. Si recta BD congruit rectæ AC, erit BD = AC. Si triangulum GFH congruit triangulo ABC, erit △GFH = △ABC. Si arcus DC congruit arcui HL, erit curva DC = HL. Si ſector DBC congruit ſectori HIL, erit ſector DBC = HIL.

Axioma. 79. *Anguli qui congruunt ſunt æquales, & anguli rectilinei æquales congruunt.*

Tab. I. Fig. 19. & 20.

80. E. g. Si angulus DBC congruit angulo HIL, erit angulus B = ang. I. Nempe ſi angulus DBC ita ſuperimponi & applicari poſſit HIL, ut vertex illius B cadat in verticem

cem hujus I, crus unum illius BD cadat in crus unum hujus IH, & crus alterum illius BC cadat in crus alterum hujus GL, dicentur anguli DBC & HIL congruere, adeoque erit DBC = HIL. Et ſi anguli rectilinei æquales ſunt, eorum vertices & crura ſibi mutuo impoſita ita coincident.

81. Cum angulus rectilineus maneat idem etſi crura anguli longiora vel breviora fiant, anguli rectilinei congruent, dum vertices & ambo crura circa verticem coincidant, etſi crura unius anguli ſint longiora vel breviora cruribus alterius.

82. *Anguli, quorum menſura eſt eadem, ſunt æquales* (§§. 58 & ſeqq.): & viciſſim *anguli rectilinei æquales eandem menſuram habent.* Axioma.

83. Sic ſi arcus DC totidem gradus numeret, quot arcus HL, anguli DBC & HIL erunt æquales; & viciſſim ſi anguli DBC & HIL æquales ſunt, arcus DC & HL eundem graduum numerum continent. Tab. I. Fig. 19. & 20.

84. *Inter puncta duo A & B non niſi unica recta AB duci poteſt.* Axioma. Tab. I. Fig. 1.

85. Quæcunque enim recta alia ex A ad B duceretur, eandem neceſſario viam teneret. Curvæ autem plurimæ ſive ſupra ſive infra rectam AB ex A verſus B duci poſſent.

86. *Duæ* ergo *rectæ ſpatium comprehendere*, ſeu intra ſe intercipere clauſum *nequeunt.* Corollar.

Tab. I. Fig. 2. 87. Comprehendant enim rectæ A C & B D ſpatium; in punctis extremis A & B, item C & D concurrant neceſſe eſt, intervallo inter ſe relicto: ergo inter puncta A & C plures rectæ quam una duci poteſt; id quod abſurdum (§. 84).

Axioma. Tab. I. Fig. 8. 88. *In quovis triangulo rectilineo* (DFE) *duo quævis latera* (D E, E F) *ſunt tertio* (D F) *majora.*

89. Nempe duo latera D E, E F non modo in punctis D & F cum recta D F debent concurrere, ſed etiam in puncto quodam E ſupra rectam D F inter ſe conjungi, ſeu ſibi mutuo occurrere. Enimvero ſi D E & F E eſſent latere D F minora, ne quidem in recta D F poſſent ſibi occurrere, multo minus ſupra eam; ſi D E & F E eſſent lateri D F æqualia, non niſi in ipſo D F ſeſe punctis extremis E contingerent. Ut ergo ſupra D F ſibi poſſint occurrere, neceſſe eſt D E & F E ſimul ſumta eſſe majora tertio latere D F. Duo fila ſupra tertium extenſa vel extendenda veritatem axiomatis ad oculum demonſtrant.

Problema. Tab. II. Fig. 26. 90. *Triangulum æquilaterum conſtruere data recta* A C.

Reſolutio. 1. Sume rectam datam pro baſi trianguli.

2. Cape circino intervallum A C, & ex puncto A deſcribe arcum verſus B.

3. Circini apertura non mutata ex puncto C deſcribe alium arcum, qui priorem interſecet in B.

4. Ex-

4. Ex A & C duc rectas AB, CD. Erit △ ABC æquilaterum.

AB & AC ſunt radii ejusdem circuli *per conſtructionem*: radii ejusdem circuli ſunt inter ſe æquales (§. 48); ergo AB = AC. Porro AC ſeu CA & CB ſunt radii ejusdem circuli *per conſtruct.* Ergo CA ſeu AC = CB (§. *cit.*). Igitur AB & CB ſunt æqualia eidem tertio AC *per demonſtrata*: ſunt ergo æqualia inter ſe (§. 16 *Arith.*). Quare cum ſit AB = AC = CB, triangulum ABC eſt æquilaterum (§. 71). Demonſtratio.

91. *Triangulum æquicrurum conſtruere datis duabus rectis* AB, AC. Problema. Tab. II. Fig. 27.

1. Linea minor AC ſumatur pro baſi trianguli.

2. Cape circino intervallum ſeu longitudinem rectæ AB, & ex puncto A rectæ AC duc arcum verſus B.

3. Eodem intervallo ex puncto C rectæ AC duc arcum, qui priorem interſecet in B. Erit triangulum ABC æquicrurum.

Eſt enim AB = CB *per conſtructionem*. Ergo △ ABC æquicrurum (§. 17). Q. e. d. Demonſtratio.

92. Tirones attendant, quid opus ſit dari, ut figura quædam deſcribi poſſit. E. g. triangulum æquilaterum ABC deſcribitur data uni- Fig. 26. 27 Tab. II.

ca recta A C (§. 90): triangulum æquicrurum ABC non deſcribitur niſi datis duabus rectis
Fig. 19. AB & AC (§. 91); circulus deſcribitur data
Tab. I. recta unica BD (§. 40).

93. Præter data modus figuram deſcribendi meretur tironum attentionem. Nam alius eſt modus, quo ex data recta deſcribitur triangulum æquilaterum; alius autem, quo ex data recta deſcribitur circulus, quanquam utrobique unica detur recta. Modus deſcribendi continetur vel in reſolutione problematis (§. 90), vel in definitione genetica (§. 40).

94. Ex datis, & modo deſcribendi oriuntur cetera omnia ad figuram pertinentia, ipſaque figura. E. gr. ex data recta, & modo deſcribendi circulum oritur peripheria circuli, magnitudo diametri, & magnitudo plani, quod a peripheria circumſcribitur &c. Ex data recta, & modo deſcribendi triangulum æquilaterum oriuntur duo latera datæ rectæ æqualia, oriuntur anguli, angulorum numerus ternarius, & quantitas ſingulorum &c. Nam ideo tanta eſt peripheria ADC FE (Fig. 19. Tab. I.), ideo tanta eſt magnitudo ſpatii a peripheria circumſcripti, quia tanta fuit longitudo rectæ datæ BD circa punctum fixum B motæ; ideo peripheria redit in ſe ipſam, omniaque ejus puncta a centro B æqualiter diſtant; quia deſcripta eſt motu rectæ BD circa punctum fixum B motæ, donec rediret recta BD ad punctum D.
Fig. 26. Similiter ideo tanta eſt longitudo laterum AB,
Tab. II. & CB; hic potius quam alius angulorum numerus, hæc potius quam alia angulorum quantitas & relatio, hæc potius quam alia trianguli ABC magnitudo ſeu area, quia tanta fuit longitudo rectæ AC, taliſque potius modus deſcribendi triangulum ABC quam alius.

95. Poſitis igitur datis una cum modo deſcribendi, ponuntur ſimul cetera omnia ad figuram pertinentia. Ea quibus poſitis ponuntur alia, vocantur *Determinantia*; alia vero, quæ poſitis determinantibus ſimul ponuntur, appellantur *Determinata*. Definitio.

96. Sunt igitur in figuris geometriæ determinantia, tum ea, quibus datis figura deſcribi poteſt, tum modus deſcribendi; reliqua vero omnia, quæ præter data comparent in figura deſcripta, annumerari debent determinatis. Corollar.

97. Sic in circulo & triangulo æquilatero recta data pertinet ad determinantia; peripheriæ autem qualitas & quantitas, areæ circularis magnitudo & figura pertinent ad determinata; determinatis quoque annumerandi ſunt anguli trianguli æquilateri ſive eorum numerum, ſive ſingulorum quantitatem &c. ſpectes.

98. *Poſitis determinantibus ponuntur determinata.* Axioma.

99. *Si determinantia ſunt eadem, determinata quoque eadem ſunt.* Axioma.

100. Nulla eſt enim ratio, cur in determinatis diverſitas eſſe debeat, ſi nulla in determinantibus deprehenditur. Nam determinata ideo ſunt, quia ſunt determinantia; determinata ideo ſunt talia, quia talia ſunt determinantia; determinata ſunt hæc potius quam alia, quoniam hæc potius quam alia ſunt determinantia.

Theorema. 101. *Eadem ſunt, quæ & ſimilia, & æqualia ſunt; viciſſim quoque, quæ ſunt eadem, ea & ſimilia & æqualia ſunt.*

Demonſtratio. Similia enim nullam intrinſecam diverſitatem admittunt, quam ſecundum magnitudinem (§. 15); æqualia vero etiam magnitudine conſentiunt, ut per ſe patet. Quæ igitur & ſimilia & æqualia ſunt, nullum prorſus diſcrimen intrinſecum admittunt; ſunt ergo eadem. Q. *e. primum.*

Quæ eadem ſunt, nec magnitudine nec alio diſcrimine intrinſeco differant neceſſe eſt, ut per ſe patet; igitur & æqualia erunt, & ſimilia (§. 15).

Coroll. 1. 102. Determinantia ergo ſunt eadem, ſi & æqualia fuerint, & ſimilia; & viciſſim. Similiter determinata ſunt eadem, ſi & ſimilia & æqualia fuerint.

Coroll. 2. 103. Quare *ſi determinantia ſunt ſimilia & æqualia; determinata* quoque *ſimilia & æqualia ſunt* (§. 99. 102.): *ſi determinantia ſunt eadem, determinata ſunt æqualia & ſimilia* (§§. *cit.*).

Coroll. 3. 104. Rectæ omnes ſunt inter ſe ſimiles (§. 25). Quare *ſi radii duorum circulorum fuerint æquales*, determinantia duorum circulorum, & duarum peripheriarum ſunt eadem (§. 96. 40. 102); igitur etiam determinata, ſeu *tam circuli*

quam

quam peripheriæ ſunt ſimiles & æquales (§. 103).

105. Similiter ſi duo triangula æqui- Coroll. 4.
latera ex data utrinque recta ejusdem magnitudinis fuerint deſcripta; determinantia ſunt eadem (§. 96. 90. 25. 102); igitur determinata ſeu ipſa *triangula æquilatera, ex æqualibus rectis deſcripta, ſunt & æqualia & ſimilia.*

106. Si ad deſcribendum aliud trian- Coroll. 5.
gulum æquicrurum datæ fuerint duæ Fig. 27.
rectæ, quarum una rectæ AC, altera Tab. II.
rectæ AB ſit æqualis; erunt, ob rectas omnes inter ſe ſimiles (§. 25), & æqualium ad æqualia rationem eandem (§. 99. *Arith.*), determinantia ſimilia & æqualia (§. 96. 91.), adeoque eadem (§. 102); erunt ergo determinata quoque, ſeu ipſa triangula æquicrura inter ſe ſimilia & æqualia; anguli quoque unius ſingulatim æquales angulis alterius (§. 103).

107. Nempe utrobique anguli illi ſunt æquales, qui æqualibus lateribus opponuntur; & aliunde conſtat (§. 61), angulos æquales eſſe etiam ſimiles. Rectæ autem datæ, quæ ſeorſim ſunt ſimiles ſingulæ ſingulis, manent etiam conjunctæ ſimiles binæ binis, ſi in diverſis triangulis æquicruris eandem ad ſe invicem rationem habent. Habent autem eandem rationem, ſi ſingulæ ſingulis ſunt æquales (§. 99. *Arith.*). Æqualia nempe ad æqualia, rectæ duæ inter

 ſe

ſe æquales ad duas alias rectas pariter inter ſe æquales, eandem rationem habent (§. cit.).

Problema. 108. *Datis tribus rectis, quarum duæ quælibet ſunt tertia majores, triangulum conſtruere.*

Tab. II. Fig. 28. E. gr. Datæ ſint rectæ *ae*, *Ab*, *Bc*; petatur ex iis conſtrui triangulum.

Reſolutio. 1. Sume pro baſi ſeu parte ima trianguli quamcunque ex datis rectis, e. gr. rectam *ae*, quæ poſtea dicetur AC.

2. Circini pede uno in puncto A rectæ A*b* defixo, aperi circinum, dum pes alter attingat punctum *b*.

3. Intervallo A*b* deſcribe ſupra baſin *ae* ſeu AC ex A arcum *x*.

4. Eadem ratione circino cape intervallum, ſeu longitudinem, rectæ B*c*, & ex puncto baſis C, intervallo rectæ *c*B, deſcribe arcum *y*.

5. Ad punctum B, ubi duo arcus *x* & *y* ſeſe interſecant, duc rectas AB, & CB; eritque triangulum conſtructum.

109. Cum in quovis triangulo rectilineo duo quælibet latera tertio majora eſſe opus ſit (§. 88); ſi arcus *x* & *y* ſeſe non interſecarent, duæ rectarum datarum non eſſent tertia majores, adeoque ex iis triangulum conſtrui non poſſet.

Coroll. I. 110. Quoniam ex tribus rectis datis triangulum conſtrui poteſt (§. 108), tres

tres rectæ ſunt determinantia trianguli (§. 96.); determinata vero ejus ſunt tres anguli, ipſumque triangulum, ejusque magnitudo (§. *cit.*).

111. Quare, cum omnes rectæ ſint inter ſe ſimiles (§. 25), ſi inſuper tres rectæ unius trianguli æquales fuerint ſingulatim tribus rectis alterius trianguli; determinantia duorum triangulorum ſimilia erunt & æqualia (§. 110); ideoque etiam determinata, hoc eſt, anguli ſinguli, ipſaque triangula (§. 110), erunt æqualia & ſimilia (§. 103). Coroll. 2.

112. Itaque ſi in duobus triangulis fuerit AB = *ab*, BC = *bc*, AC = *ac*; erit A = *a*, B = *b*, C = *c*, △ ABC ≌ △ *abc*. Coroll. 3. Fig. 25. Tab. I.

113. *Ad datum punctum angulo dato angulum æqualem conſtruere.* Problema.

Caſus I. Si dantur gradus anguli conſtruendi. Reſolutio.

1. Duc lineam BC. Fig. 5.
2. Puncto B applica centrum ſemicirculi transportatorii (Fig. 21 Tab. I); hujus vero radium ſeu regulam BC applica lineæ BC. Tab. I.
3. In dicto ſemicirculo numera gradus datos anguli conſtruendi, a puncto C progrediendo verſus A.

4. Gra-

4. Gradui poſtremo adnota punctum A.

5. Duc rectam BA; & erit CBA angulus quæſitus (§. 58. 82).

Fig. 23. & 24. Tab. I. *Caſus II.* Si datur in charta angulus BAC (Fig. 23.), cui æqualis conſtruendus eſt ad punctum A (Fig. 24).

1. Duc rectam AB (Fig. 24).

2. Circino ad libitum aperto ex vertice anguli A (Fig. 23) inter ejus crura duc arcum BC.

3. Circino non mutato ex puncto A (fig. 24) duc arcum DC.

4. Cape circino intervallum ſeu arcum CB (fig. 23).

5. Idem intervallum ex D transfer verſus C in arcu DC (fig. 24).

6. Per A & C (fig. 24) duc rectam. *Et factum eſt quod petebatur.*

Demonſtratio. Cum in triangulis ACB (fig. 23) & DCB (Fig. 24) latera ſingula unius ſint æqualia lateribus ſingulis alterius *per conſtructionem*; erit angulus BAC (fig. 23.) = DAC (fig. 24.) (§. 112.). Q. e. d.

Fig. 31. Tab. II. *Caſus III.* In campo ſi angulo B æqualis alter conſtituendus eſt ad C; fit id vel ope aſtrolabii (§. 60);

Vel 1. Deſignatis pro arbitrio in rectis BA & BC punctis *a* & *c*; metire rectas B*a*, B*c*, *ca*.

2. Re-

2. Rectæ B *a* æqualem transfer in C *e*; defixis in C & *e* baculis, funis vel catena circa eos ita circumducitur, ut fiat $Cd = Bc$, & $ed = ca$. Erit tunc angulus $dCe = aBc$ (§. 112).

114. *Ex datis duobus lateribus* A B & A C *una cum angulo intercepto* A *conſtruere triangulum.* Problema. Fig. 25. Tab. I.

1. Sume datarum unam (A C e. g.) pro baſi trianguli. Reſolutio.

2. Ad punctum A conſtrue angulum dato æqualem (§. 113).

3. Ex crure anguli altero, quod ante *num.* 2. pro arbitrio produxiſti, reſeca partem rectæ datæ A C æqualem.

4. Puncta B & C connecte ducta recta B C. *Et factum eſt quod petebatur.*

115. Sunt ergo duo latera cum angulo intercepto determinantia trianguli (§. 96); latus vero tertium, duo anguli reliqui, & ipſum triangulum erunt determinata. Quare (cum anguli æquales ſint etiam ſimiles (§. 61), rectæque omnes inter ſe ſimiles (§. 25)); ſi in duobus triangulis fuerit $A = a$, $AB = ab$, $AC = ac$; determinantia triangulorum ſunt ſimilia & æqualia; erunt ergo etiam determinata ſimilia & æqualia (§. 103); ideoque $BC = bc$, $B = b$, $C = c$, $\triangle ABC \cong \triangle abc$. Corollar. Fig. 25. Tab. I.

116. Da

Problema. Fig. 29. Tab. II. 116. *Data recta* A C, *& angulis duobus* A & C *utrinque ei adjacentibus, conſtruere triangulum.*

Reſolutio. 1. Data recta A C ſumitur pro baſi, & ad punctum ejus A conſtruitur angulus dato A æqualis (§. 113).

2. Similiter ad punctum C rectæ AC conſtruitur angulus dato C æqualis (§. *cit.*).

3. Crura angulorum A & C producuntur, donec concurrant in puncto aliquo e. gr. B. *Et factum eſt, quod petebatur.*

Corollar. 117. Sunt ergo recta una cum duobus angulis utrinque adjacentibus determinantia trianguli; latera vero reliqua cum angulo tertio, ipſumque triangulum ſunt determinata (§. 96). Quare, cum anguli æquales ſint etiam ſimiles (§. 61), rectæ omnes ſint ſimiles (§. 25); ſi in duobus triangulis fuerit Fig. 25. Tab. I. $AC = ac$, $A = a$, $C = c$; determinantia triangulorum ſunt ſimilia & æqualia; igitur etiam determinata erunt æqualia & ſimilia (§. 103.), hoc eſt, $AB = ab$, $BC = bc$, $B = b$, $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Problema. Fig. 5. Tab. I*. 118. *Datis duobus lateribus* AB & BC *cum angulo* A *uni eorum oppoſito, triangulum conſtruere.*

1. Duc

1. Duc rectam B A.

2. In puncto ejus A conſtrue angulum dato æqualem (§. 113.), crus anguli alterum A C utcunque producendo.

3. Intervallo rectæ datæ B C ope circini ex B interſeca crus AC, utcunque productum in C.

4. Duc rectam B C. *Et factum eſt quod petebatur.*

5. Si latus B C, quod angulo dato A opponitur, fuerit minus latere dato B A, cui angulus datus adjacet; crus A C anguli A bis ſecabitur a recta B C, nempe in utroque C. Unde præterea dari debet ſpecies anguli C, nempe utrum acutus, an obtuſus eſſe debeat. Fig. 4. Tab. I*.

119. Datis igitur duobus lateribus cum angulo A uni eorum oppoſito, nec non ſpecie anguli C, ubi opus fuerit; triangulum quodvis conſtrui poteſt (§. 118). Sunt igitur duo latera, & angulus uni eorum oppoſitus, cum ſpecie anguli, qui laterum datorum alteri opponitur, determinantia: latus vero tertium, duo anguli reliqui, ac ipſum triangulum ſunt determinata (§. 96). Coroll. 1.

120. Quare, cum rectæ omnes ſint ſimiles (§. 25); anguli æquales ſint etiam ſimi- Coroll. 2. Fig. 5. Tab. I*.

ſimiles (§. 61); ſi in duobus triangulis rectangulis BAC & *bac* (aut in duobus ad C & *c* obtuſangulis, aut denique in duobus acutangulis) fuerit BA = *ba*, BG = *bc*, A = *a*; determinantia triangulorum ſunt ſimilia & æqualia: erunt ergo etiam determinata ſimilia & æqualia (§. 103), ideoque AC = *ac*, B = *b*, C = *c*, △ ABC ≌ △ *abc*.

120.* Sæpiſſime contingit, ut inter ſe comparentur duæ aut plures figuræ (e. gr. duo triangula); quarum anguli ſunt æquales, latera vero aut ſingulatim æqualia aut ſaltem proportionalia. E. gr. in △ △ ABC & *abc* (Fig. 5 Tab. I*) eſt A = *a*, B = *b*, C = *c*, AB = *ab*, BC = *bc*, AC = *ac*. In triangulis vero ABC & *abc* (Fig. 7. Tab. I*) inveniemus poſtea eſſe quidem A = *a*, B = *b*, C = *c*, ſeu angulos æquales; latera vero non æqualia, ſed tantum proportionalia, ut ſit AB : *ab* = BC : *bc* = AC : *ac*. In figuris ita comparatis *latera* æqualibus angulis oppoſita dicuntur *homologa*; *anguli* etiam vel æqualibus lateribus, vel proportionalibus eodem ordine oppoſiti dicuntur *homologi*.

Erunt ergo in △ △ ABC & *abc* (Fig. 5. & 7. Tab. I*) latera AB & *ab*, BC & *bc*, AC & *ac* homologa; anguli quoque A & *a*, B & *b*, C & *c* homologi.

Theorema. 121. *Si duæ, aut plures, lineæ, ſuperficies, vel ſolida ex datis angulis æqualibus*

ulis vel rectis æqualibus, juxta easdem regulas deſcribuntur; erunt etiam latera reliqua homologa ſingillatim utrobique æqualia, anguli homologi ſingillatim utrobique æquales; & lineæ, ſuperficies, ac ſolida tota æqualia ac ſimilia.

Anguli enim æquales ſunt etiam ſimiles (§. 61.), rectæ omnes ſunt inter ſe ſimiles ſeorſim (§. 25.), & ſi utrobique æquales ſunt ſingillatim *per hypoth.*, etiam conjunctæ ſeu combinatæ retinent ſimilitudinem (§. 107); deſcribuntur vero lineæ, ſuperficies, ac ſolida ex angulis & rectis ſingillatim æqualibus juxta easdem regulas *per hypoth.* ſunt ergo utrobique determinantia omnia æqualia & ſimilia (§. 96.); erunt igitur determinata quoque omnia utrobique ſingillatim æqualia & ſimilia (§. 103.), ideoque latera etiam reliqua homologa erunt ſingillatim utrobique æqualia, anguli reliqui homologi ſingillatim utrobique æquales, ipſæ autem lineæ inter ſe, ſuperficies inter ſe, & ſolida ſolidis ſimilia atque æqualia (§. 96.). Q. e. d. Demonſtratio.

Propoſitio hæc ambitu ſuo complectitur innumeras alias; inter ceteras vero etiam ſuperius (§§. 104. 105. 106. 111. 115. 117. 120.) demonſtratas. Unde ab exemplis ibi datis illuſtratur.

Definitio. Tab. I. Fig. 3. 122. *Recta* CB dicitur *rectæ* BD *jacere in directum*, ſi ambæ ſint partes ejusdem rectæ CD.

Sic Tab. I. fig. 6. rectæ GA & AF ſitæ ſunt in directum, ſimiliter rectæ EA & AH; quia hæ ejusdem rectæ EH, illæ ejusdem rectæ GF partes ſunt. Non minus Tab. I. fig. 19 radius AB & radius BC ejusdem rectæ ſeu diametri AC partes ſunt; ſemidiameter AB ergo jacet in directum ſemidiametro BC, hoc eſt radius BA ſibi ipſi.

Coroll. 1. 123. Igitur cum deſcribitur circulus; dum abſolvatur, radius bis ſibi ipſi jacet in directum.

Coroll. 2. Tab. I. Fig. 19. 124. Pars circuli ABDC deſcribitur, dum recta BC per D progreſſa ad A ſibi ipſi jaceat in directum; & ſimiliter pars circuli AEFC deſcribitur, dum recta BA = BC (§. 48) ab A per E & F usque ad C promota ſibi ipſi jaceat in directum (§. 123). Idem patet de parte peripheriæ CDA, & de parte peripheriæ AEFC. Superficies ergo AEFC & ABDC, itemque lineæ CDA & AEFC ex æqualibus rectis eodem modo deſcribuntur. Sed tales ſuperficies & lineæ ſunt inter ſe æquales & ſimiles (§. 121.). Ergo pars circuli ABDC ≌ AEFC parti alteri ejusdem circuli. Et pars peripheriæ CDA ≌ AEFC parti alteri

pe-

peripheriæ. Sunt igitur ABDC & AEFC ſemicirculi, & CDA atque AEFC ſemiperipheriæ.

125. Diameter ergo circuli AC dividit tam circulum quam peripheriam in duas partes æquales (§. 124), & recta, quæ peripheriam circuli dividit in duas partes æquales, eſt diameter circuli. Coroll. 3.

126. Et ſuper quavis recta (producta ſi opus eſt) ex quovis ejus puncto deſcribi poteſt ſemicirculus (§. 124). Coroll. 4.

127. Quodſi ergo ſuper recta CD ex puncto B deſcribatur ſemicirculus, & erigatur in B recta BA, ut angulus B ſit deinceps poſito *x* æqualis, erit tam B quam *x* angulus rectus (§. 63), & B habebit pro menſura arcum CA (§. 58). Erit quoque arcus AD menſura anguli *x* (§. cit.). Quare cum anguli B & *x* ſint æquales *per hypoth.* angulorum autem æqualium menſuræ ſint æquales (§. 82), erit CA = AD. Sed CAD eſt ſemicirculus (§. 126); ergo CA & AD ſunt quadrantes circuli. *Habet igitur angulus rectus pro menſura quadrantem peripheriæ circuli*, ſeu 90°; & *duo recti habent pro menſura* 180° (§. 42.). Coroll. 5. Tab. I. Fig. 8.

Coroll. 6. 128. *Angulus* quoque, *qui habet pro menſura quadrantem peripheriæ circuli ſeu* 90 *rectus eſt* (§. 82); *& anguli, qui pro menſura habent* 180, *erunt æquales duobus rectis.*

Nempe ſi anguli B menſura eſt quadrans, anguli deinceps poſiti *x* menſura ſemper erit pariter quadrans (§. 126). Quare cum anguli æquales ſint quorum æqualis eſt menſura (§. 82); erit deinceps poſitus *x* angulo B æqualis; adeoque tam B quam *x* rectus.

Coroll. 7. 129. Cum anguli æquales habeant easdem ſeu æquales menſuras (§. 82), angulus recto æqualis habebit quoque pro menſura quadrantem ſeu 90 (§. 127). Quare cum angulus, qui habet pro menſura 90 ſit rectus (§. *cit.*); *angulus recto æqualis rectus eſt.* Porro cum omnis angulus rectus habeat pro menſura 90 (§. 127), anguli omnes recti æquales habent menſuras. Sed anguli, quorum menſura eſt æqualis, ſunt æquales (§. 82). *Omnes* ergo *anguli recti ſunt inter ſe æquales.*

Coroll. 8. Tab. I. Fig. 20. 130. Anguli G & I habent pro menſura 180 (§. 126): anguli quorum menſura eſt ſemiperipheria circuli ſunt æquales duobus rectis (§. 127.). Ergo G

+ I = 180, *ſeu anguli ad idem punctum ſuper eadem recta conſtituti æquales ſunt duobus rectis.* Quare *ſi æquales fuerint*, quilibet ſeorſim pro menſura habet dimidiam peripheriam ſemicirculi ſeu 90 (§. 42); *uterque* ergo *rectus eſt* (§. 127).

131. Hoc idem etiam verum eſſe de angulis pluribus, quam duobus, ad idem punctum ſuper eadem recta conſtitutis patet per demonſtrationem modo allatam.

132. Magno uſui eſt corollarium hoc, nam cognito angulo I cognoſcitur quoque angulus G. Unde ſi e. gr. acceſſus non pateret, vel inſtrumentum non eſſet ſatis amplum ad dimetiendum angulum G, metimur angulum I.

133. Cum omnes anguli circa idem punctum G conſtituti habeant pro menſura integram circuli peripheriam, adeoque 360 (§. 42); erunt *anguli omnes ad idem punctum conſtituti æquales* bis duobus rectis (§. 127) ſeu *quatuor rectis.* Coroll. 9. Tab. III. Fig. 59.

134. Hactenus allata a §. 104. & ſeqq. qui perpendit, mirabitur fœcunditatem principii ſupra demonſtrati de determinantibus & determinatis (§ 103).

135. Eandem fœcunditatem loquentur paulo poſt dicenda (§. 154 & ſeqq.).

136. Compertum equidem habeo principium de determinantibus & determinatis tironibus videri comprehenſu difficile; eſt enim admodum univerſale, & a ſenſibus procul re-

motum. Sed difficultas in hoc opuſculo nunc plurimum videtur mitigata, principio univerſali & exemplis ſingularibus explanato, & ad ſingularia mox applicato.

137. Major lux affulgebit tironibus, ſi in ipſo aditu Geometriæ diu multumque exerceantur in figurarum deſcriptione, & ubi in hac probe fuerint exercitati, moneantur omnem attentionem afferre ad ea quæ dantur, & ad uſum datorum in ipſa deſcriptione. Quæ enim ex datis, eorumque uſu & combinatione ſponte quaſi ſua reſultant, utique per data, eorumque uſum & combinationem determinantur.

138. Cum maxima pars Geometricarum demonſtrationum innitatur triangulis ſive æqualibus ſive ſimilibus; operæ pretium ferent tirones, ſi theoremata de triangulorum ſive æqualitate ſive ſimilitudine ſibi fecerint multa meditatione & applicatione valde familiaria. Quod denuo frequenti exercitatione in deſcribendis triangulis tum æqualibus tum ſimilibus obtinebunt.

139. Alias præterea utilitates afferet multiplex figurarum deſcriptio. Ex datis enim ad figuram deſcribendam neceſſariis cognoſcitur, quid in campo dimetiendum ſit, ut figura rei dimetiendæ in charta delineari, & ejus magnitudo ad numeros revocari queat.

140. Determinantia & determinata regnant in omni entium & diſciplinarum genere; vix al unde tamen clarior eorundem idea hauriri poteſt quam ex Geometria. Principio igitur determinantium ſuperſtructa Geometria ampliorem uſum habet, quam prima fronte apparet.

141. Si

141. *Si recta EH ſecatur a recta GF; anguli verticales C & D ſunt æquales.* Theorema. Tab. I. Fig. 6.

Anguli enim C + A = 180 (§. 130); ſunt etiam anguli A + D = 180 (§. 130). Ergo C + A = A + D (§. 16. *arithm.*). Quodſi ergo utrinque ſubtrahis eundem angulum A, erit C = D (§. 25. *arithm.*). Demonſtratio.

142. Eodem modo demonſtratur eſſe angulum A æqualem angulo B. Non exigui uſus hoc quoque theorema eſt; ut in progreſſu patebit.

143. *Figuræ inter ſe æquiangulæ* dicuntur, ſi anguli ſinguli unius fuerint ſingillatim æquales ſingulis angulis homologis alterius. Similiter *figuræ inter ſe æquilateræ* dicuntur, ſi ſingula latera unius fuerint ſingillatim æqualia ſingulis lateribus homologis alterius. Definitio.

144. *Figuræ ſimiles ſunt inter ſe æquiangulæ.* Theorema. Cum enim in figuris latera diſtinguamus & angulos; figuræ autem ſimiles nulla re diſcerni poſſint niſi magnitudine forſitan (§. 15); anguli homologi figurarum ſimilium tales eſſe debent, ut nec ipſi differre poſſint niſi forte magnitudine, adeoque anguli homologi figurarum ſimilium ſimiles ſint neceſſe eſt (§. 15). Enimve-

vero anguli ſimiles ſunt etiam æquales (§. 61); ergo figuræ ſimiles angulos homologos inter ſe æquales habent. Sunt igitur inter ſe æquiangulæ (§. 143).

Axioma. 145. *Duæ quantitates parvæ* a & b *eandem inter ſe rationem habere poſſunt, quam habent inter ſe duæ quantitates* A & B, *prioribus multo majores.*

146. Propoſitio in numeris & lineis rectis eſt manifeſta. Nam cum 2 toties contineatur in 4, quoties 2000 in 4000, nempe utrumque bis; 2 ad 4 eandem rationem habet, quam habet 2000 ad 4000. & linea duorum pedum ad lineam 4 pedum eandem rationem habet, quam recta 2000 pedum ad rectam 4000 pedum.

Coroll. 1. 147. Rationes ergo magnitudinum ſeu quantitatum non ſunt ipſæ magnitudines & quantitates.

Coroll. 2. 148. Quamvis ergo *figuræ ſimiles* magnitudine ſeu quantitate differre poſſint (§. 19); *latera* tamen *homologa habere debent proportionalia.* Habeant enim figuræ ſimiles latera homologa non proportionalia, ſi fieri id poteſt; latera homologa figuræ unius aliam & diverſam rationem habent, quam habeant latera homologa figuræ alterius. Quare cum rationes magnitudinum non ſint magnitudines (§. 147.); figu-

guræ ſimiles re alia different quam magnitudine; adeoque non erunt ſimiles (§. 15). Similes igitur erunt *per hypoth.* & non erunt ſimiles *per demonſtr.* Quod abſurdum. Latera ergo homologa figurarum ſimilium proportionalia eſſe debent.

149. Similiter ſi plures lineæ ad determinandas figuras vel lineas alias conjunguntur, determinantia ſimilia non erunt, niſi & ſingulæ unius figuræ ſeorſim ſint ſimiles ſingulis ad determinandam alteram conjunctis; & quæ conjunguntur utrobique eandem inter ſe rationem habeant (§§. 15, 147). Coroll. 3.

150. E. gr. Si tres rectæ conjunguntur ad determinanda triangula A B C & *abc*; ut determinantia ſint ſimilia, non ſufficit rectam AB eſſe ſimilem rectæ *ab*, AC ∽ *ac*, BC ∽ *bc*; ſed porro requiritur ut & AB : AC = *ab* : *ac*, & AB : BC = *ab* : *bc*. Tab. I. Fig. 25.

151. Figuræ ſimiles inter ſe ſunt æquiangulæ (§. 144); & latera homologa habent proportionalia (§. 148), ſeu *figuræ ſimiles & angulos homologos habent æquales, & latera homologa proportionalia.* Corollar.

152. *Quæ ex datis ſimilibus per eaſdem regulas determinantur* (ſeu oriuntur vel deſcribuntur), *ſimilia ſunt* (§. 15, 96). Axioma.

153. Nulla enim eſt diſſimilitudinis ratio, ſi & data omnia ſunt ſimilia, & regulæ eædem, juxta quas linea, ſuperficies, aut ſolidum gignitur vel deſcribitur, dummodo de datorum ſimilitudine caute judices (§. 149).

Coroll. 1. 154. Cum rectæ omnes (§. 25), omniaque puncta (§. 22) ſint ſimilia; circuli autem omnes, eorumque peripheriæ, ex dato puncto & data recta eodem modo deſcribantur (§. 40); circuli omnes, omnesque peripheriæ determinantur per data ſimilia juxta easdem regulas. *Circuli* igitur *omnes ſunt inter ſe ſimiles: peripheriæ* quoque *circulorum omnes inter ſe ſimiles ſunt.*

Coroll. 2. 155. Arcus ſeu partes peripheriæ cujuscunque determinantur per duos radios & angulum interceptum. Quodſi hic idem vel utrobique æqualis fuerit; cum radii omnes, utpote rectæ, ſint inter ſe ſimiles (§. 25), anguli quoque æquales ſint ſimiles (§. 61); *arcus diverſis radiis inter crura ejusdem anguli deſcripti ſunt partes ſimiles ſuarum peripheriarum* (§. 152); adeoque *ad ſuas peripherias eandem rationem habent* (§. 15. 147), ideoque *eundem numerum graduum continent* (§. 42). Unde parum refert parvo an magno radio deſcribatur arcus (§. 58, 59) ad angulum dimetiendum.

156. Imo

156. Imo cum anguli æquales ſint etiam ſimiles (§. 61); rectæ quoque omnes inter ſe ſint ſimiles (§. 25); *Linea ac figura quæcunque, quæ ex æquali vel æqualibus angulis, & ex una vel pluribus rectis eandem inter ſe rationem habentibus juxta easdem regulas deſcribuntur vel oriuntur*; determinantia habent ſimilia, ſeu ex datis ſimilibus per easdem regulas determinantur (§. 96); *ſunt* ergo *ſimiles* (§. 152), & figuræ non modó *angulos homologos habent æquales*, ſed etiam *latera homologa* habent *proportionalia* (§. 151). Coroll. 3.

157. Quare ſi in duobus triangulis ABC & *abc* fuerit AB : AC = *ab* : *ac*, & AB : BC = *ab* : *bc*; erit △ ABC ∽ △ *abc*, A = *a*, B = *b*, C = *c* (§. 156). Corollar. Tab. I*. Fig. 7. & 6.

158. Si in duobus triangulis ABC & *abc* fuerit A = *a*, AB : AC = *ab*: *ac*; erit △ ABC ∽ △ *abc*; AB : BC = *ab* : *bc*, & B = *b*, C = *c*. Corollar.

159. Si in duobus triangulis ABC & *abc* fuerit A = *a*, C = *c*; erit △ ABC ∽ △ *abc*, AB : AC = *ab* : *ac*, AB : BC = *ab* : *bc* & B = *b*. Corollar.

160. Si in duobus triangulis rectangulis ad A fuerit BA : BC = *ab* : *ac*; erit △ ABC ∽ *abc* & AB : AC = *ab* : *ac*, B = *b*, C = *c*. Corollar. Tab. I*. Fig. 7.

161. Si

Corollar. Tab. I*. Fig. 6. 161. Si in duobus triangulis acutangulis, vel in duobus obtuſangulis fuerit A = *a*, BA : BC = *ba* : *bc*; erit △ ABC ∽ △ *abc*, AB : AC = *ab* : *ac*, B = *b*, C = *c*.

Corollar. 162. Si in duobus vel pluribus triangulis rectangulis fuerit vel unus præterea angulus unius æqualis uni alterius; triangula illa ſunt ſimilia (§. 156); eruntque latera homologa proportionalia, & anguli homologi æquales.

Corollar. 163. Quare *ſi ex angulo recto* A *trianguli* BAD *Tab. IV. Fig.* 67. *demittitur perpendicularis* AC, *erunt duo, quæ inde oriuntur triangula* BAC, DAC *toti* BAD, *& inter ſe ſimilia.* Nam angulus B eſt toti BAD, & △ BAC communis, & angulus D eſt toti BAD, & DAC communis; ſunt ergo ambo toti ſimilia (§ 162). Præterea, ob BAC ſimile BAD, eſt angulus BAC = D (§. 151). Ergo & △ BAC ∽ △ DAC (§. 162).

Corollar. 164. Quare cum triangula ſimilia habeant etiam latera homologa proportionalia (§. 151); erit BD : BA = BA : BC, & BD : AD = AD : CD, atque BC : AC = AC : CD. Præterea BA : AD = BC : AC = AC : CD.

165. *Ex dato puncto* B *in recta* A C *erigere perpendicularem* B F. Problema. Tab. II. Fig. 35.

1. Circini pede uno fixo in B, intervallo arbitrario reſeca utrinque partes æquales B *a* & B *e*. Reſolutio.

2. Ex *a* & *e* intervallo majore quam ſit B *a* duc arcus ſeſe interſecantes in F.

3. Per punctum interſectionis F ad punctum datum B, duc rectam F B. Erit hæc perpendicularis ad A C.

Eſt enim in triangulis *a* F B, & *e* F B latus *a* B = *e* B, *a* F = *e* F *per conſtructionem*, & F B = F B. Ergo duo anguli F B *a* & F B *e*, quos facit F B ſuper recta AC ad punctum B ſunt æquales (§. 135). Eorum igitur quilibet eſt rectus (§. 130); ergo B F ad AC perpendicularis (§. 67). Q. *e. d.* Demonſtratio.

166. In praxi ad lineas perpendiculares ducendas utimur inſtrumento, quod latine *norma*, vernacula (ein Winkelhacken) appellatur. Componitur ex duabus regulis ad angulum rectum D B E junctis. Nempe Reſolutio alia. Tab. I*. Fig. 8.

1. Crus unum B E normæ ita applicetur rectæ A C, ut crus alterum D B reſpondeat puncto dato B.

2. Jux-

2. Juxta ductum cruris B D ducatur recta. Erit hæc perpendicularis ad AC.

Demonſtratio. Angulus enim normæ B rectus eſt *per conſtruct.* & angulus DBC congruit angulo B (*per eand. conſtruct.* & §. 80). Sed anguli, qui congruunt, ſunt æquales (§. 79); ergo angulus D B C æqualis eſt recto. Atqui angulus recto æqualis rectus eſt (§. 129). Ergo DBC eſt rectus; ideoque recta B D perpendicularis ad AC (§. 67).

Problema. Tab. II. Fig. 36. 167. *Ex dato puncto* C *ad datam rectam* AB *demittere lineam perpendicularem* CG.

Reſolutio. 1. Aperto ad arbitrium circino, & pede ejus fixo in C, interſeca rectam AB in *e* & *d*, ut ſit C *e* = C *d*.

2. Ex *e* & *d*, circino magis quam ante aperto fac ſupra C interſectionem in F, ut ſit *d* F = *e* F.

3. Per F & C duc rectam F G; erit hæc perpendicularis ad A B.

Demonſt. Cum enim ſit C *e* = C *d*, *e* F = *d* F *per conſtructionem*, & F C = F C: erunt etiam anguli *e* F C = *d* F C (§. 135). Quare cum porro in triangulis *e* F G & *d* F G latera *e* F = *d* F *per conſtruct.* F G = F G; erunt etiam anguli F G *e* & F G *d* æquales (§. 136). Eorum ergo quilibet eſt rectus (§. 130), igi-

igitur recta FG perpendicularis ad AB (§. 67). Q. e. d.

168. In praxi problema ſolvitur applicando crus normæ BE (Fig. 8. Tab. I.*) datæ rectæ AB, & crus alterum BD puncto dato C, & juxta ductum cruris BD ducendo rectam CO. Hanc enim eſſe perpendicularem patet ex demonſtratione data (§. 166).

169. *Datam rectam AB bifariam ſecare.* Problema. Tab. III. Fig. 45.

1. Pede uno circini fixo in A intervallo arbitrario ducantur ſupra & infra lineam AB in D & E arcus. Reſolutio.

2. Circino æque aperto ex puncto B rectæ AB pariter ducantur arcus, qui priores interſecent in D & E.

3. Ad interſectiones D & E applicata regula, ſeu ducta recta DE deſignabit punctum C, quod rectam AB ſecabit bifariam, ut ſit AC = BC.

AD = BD, AE = BE *per conſtr.* DE = DE. In triangulis ergo ADE & BDE anguli ADE ſeu ADC & BDE ſeu BDC ſunt æquales (§. 135). Igitur in triangulis ADC & BDC, AD = BD *per conſtr.* DC = DC, & anguli ADC = BDC. Ergo & AC = BC (§. 136). Q. e. d. Demonſtratio.

Tab. III. Fig. 48. §. 170 In praxi recta AB bifariam ſecatur tentando, dum circini pede uno collocato in A, alter promovetur utcunque verſus medium e. gr. in D. Tum circini apertura non mutata pes unus figitur in B, & attenditur, quo usque porrigatur alter, nempe in E e. g. Demum apertura circini contrahitur ſecundum quantitatem dimidiæ ED, vel ſi circinus primum apertus fuit a B usque in D, & translatus in A pertingit in E, aperitur magis ſecundum dimidiam ED, ut pertingat in C.

Problema. Tab. III. Fig. 49. 171. *Angulum datum A bifariam ſecare.*

Reſolutio. 1. Ex AB & AC anguli dati cruribus reſecentur æquales AE, AF.

2. Ex E & F radio eodem, ſed arbitrario fiant arcus ſe interſecantes in D.

3. Per puncta D & A ducatur recta. Hæc biſecabit angulum A, ſeu faciet EAD = FAD (§. 135).

Problema. Tab. II. Fig. 30. 172. *Metiri diſtantiam duorum locorum A & B, ad quorum utrumque acceſſus patet ex loco tertio C.*

Reſolutio. 1. In loco arbitrario C defigatur baculus.

2. Ope funis vel catenæ menſoriæ transferatur recta CA ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus ſit cum C & A in eadem recta (§. 26).

3. Similiter recta CB transferatur ex C in *b*. Dico fore rectam *ab* = diſtantiæ AB.

Cum

Cum enim C & *c* ſint anguli verticales, erit C = *c* (§. 141). Eſt autem præterea *per conſtruct.* AC = *ac*, & BC = *bc*. Erit ergo *ab* = AB (§. 136). Demonſtratio.

173. *Metiri diſtantiam duorum locorum B & A, ad quorum duntaxat unum A acceſſus datur.* Problema. Tab. II. Fig. 32.

1. In loco C ad arbitrium electo figatur baculus, & ex C in *a* transferatur recta AC, ut ſit *ac* = CA. Reſolutio.

2. Figatur in *a* baculus, qui ſit in eadem recta cum C & A (§. 26).

3. Angulo BAC conſtruatur æqualis ad punctum *a* lineæ *ac* (§. 113).

4. In crure hujus anguli *ad* figatur baculus in *d*, & præterea alius in *b* ita, ut tamdiu poſtremum hunc baculum in linea *ad* producta promoveas, donec in eadem recta exiſtat tam cum *d* & *a*, quam cum C & B. Erit *ab* = AB.

Eſt enim angulus BAC = *caa* *per conſtruct.* recta AC = *ca*, & quia anguli C & *c* ſunt verticales, C = *c* (§. 141). Igitur *ab* = AB (§. 137). Q. e. d. Demonſt.

174. Non abſimili modo invenire licet per triangula æqualia diſtantiam duorum locorum inacceſſorum, quærendo primum ſingulatim diſtantiam unius a ſtatione electa C, deinde diſtantiam alterius ab eadem ſtatione C, &

 tum

tum denique ope diſtantiarum inventarum ab eadem tertia ſtatione C diſtantiam duorum locorum inacceſſorum inter ſe: ſed quia id longe facilius fieri poteſt per triangula ſimilia, plura de eo dicere ſuperſedeo.

Theorema. Tab. II. Fig. 40. 175. *In triangulo æquicrure* ADC, *anguli ad baſin* A *&* C *ſunt æquales*. 2. *Recta* DB, *quæ angulum* ADC *bifariam ſecat, baſin quoque* AC, *&* 3 *ipſum triangulum* ADC *bifariam ſecat, &* 4 *ad* AC *perpendicularis eſt.*

Demonſtratio. Quoniam ADC eſt triangulum æquicrurum *per hypoth.* erit AD = CD (§. 71). Eſt autem porro DB = DB, & *o* = *x per hypoth.* Ergo A = C, AB = BC, △ ADB = △ CDB, & inſuper *e* = *f* (§. 136); ergo etiam anguli *e* & *f* ſunt recti (§. 130), atque hinc DB perpendicularis ad AC (§. 67). Q. *e. d.*

Coroll. 1. 176. Cum triangulum æquilaterum ſit æquicrurum, quodcunque ejus latus pro baſi ſumas (§. 71); *eadem valent de triangulo æquilatero* in quocunque ejus ſitu.

Coroll. 2. 177. In triangulo æquilatero omnes anguli ſunt inter ſe æquales; adeoque *triangulum æquilaterum eſt etiam æquiangulum.*

178. *Pe-*

178. *Parallelæ* dicuntur *lineæ* A C & B D, quæ ubique æqualiter inter ſe diſtant. Metimur autem diſtantiam duarum rectarum per longitudines perpendiculorum inter rectas interceptorum; perpendicula enim eundem conſtanter angulum efficiunt cum linea, cui inſiſtunt (§. 67). Unde recta LM rectæ HI parallela deſcribitur motu puncti L, ſi perpendiculum idem HL per lineam HI movetur ita, ut HL maneat conſtanter perpendicularis ad HI. Quare etiam *parallelæ* dicuntur *lineæ*, ſi duo quævis perpendicula inter eas intercepta ſunt æqualia. Definitio. Tab. I. Fig. 2. Tab. I*. Fig. 9.

179. *Perpendicularis ad parallelarum unam eſt etiam perpendicularis ad alteram.* Theorem. Tab. I*. Fig. 10.

Sint IK & GH parallelæ, ſit EB perpendicularis ad IK, dico etiam fore BE perpendicularem ad GH.

Fiat BA = BC, & erigantur ex A & C, perpendiculares AF & CD. Quoniam GH & IK ſunt parallelæ *per hyp.* perpendicula AF & CD inter eas intercepta ſunt æqualia, ſeu AF = CD (§. 178), & ob AF & CD perpendiculares *per præpar.* A & C ſunt anguli recti (§. 67), adeoque inter ſe æquales (§. 129). Quare cum etiam ſit AB = CB *per præpar*, erit *o* = *m*, BF =

BD (§. 136). Porro ob EB perpendicularem ad IK *per hyp.* erit angulus EBI rectus (§. 67), adeoque EBK = EBI (§. 63) ſeu $o + x = y + m$. Quare cum ſit $o = m$ *per dem.* erit etiam $x = y$ (§. 29 *Arith.*). Sed eſt etiam BF = BD *per demonſtr* & BE = BE (§. 14 *Arith.*). Ergo $n = u$ (§. 136); ideoque n & u recti (§. 130), igitur BE perpendicularis ad GH (§. 67). Q. *e. d.*

Problema. Tab. II. Fig. 33. 180. *Data recta* AB *aliam* CD *ducere parallelam* ad datum punctum C.

Reſolutio. 1. Demittatur in c & in d erigatur perpendicularis (§. 167, 165).

2. Ope circini vel aliter fiat c C = d D.

3. Per puncta C & D ducatur recta CD.

Erit CD rectæ AB parallela (§. 178).

Aliter.

Tab. II. Fig. 34. 181. Utimur ad parallelas ducendas inſtrumento, quod *Parallelismum* vocant. Conſtat duabus regulis circa duo retinacula mobilibus.

1. Regula una applicatur rectæ AB, cui parallela fieri debet.

2. Re-

2. Regula altera applicatur puncto dato C, per quod parallela ducenda eſt; & juxta ductum hujus regulæ fit recta CD.

Fundamentum conſtructionis aperient ſequentia theoremata.

182. *Si duæ lineæ parallelæ* BA *ſecantur a tertia* CD, *erunt* 1 *anguli alterni* m *&* g *æquales.* 2. *Angulus externus* e *erit æqualis interno oppoſito* g, *&* 3. *duo anguli interni* f *&* g *ſimul ſumti erunt æquales duobus rectis.* Theorema. Tab. II. Fig. 37.

Ducantur perpendicula *f*K, *l*O (§. 165), erit *f*K = *l*O (§. 178, 179); & anguli ad K & O recti (§. 67); adeoque K = O (§. 129). Eſt porro *fl* utrique triangulo *fKl*, & *flO* communis. Ergo *g* = *m* (§. 138). *Quod erat primum.* Demonſtratio.

Anguli *e* & *m* ſunt verticales (§. 65), adeoque *e* = *m* (§. 141). Sed eſt etiam g = *m per dem. num.* 1. Ergo *e* & g æquales eidem tertio *m*, eſt igitur *e* = g (§. 16 *arith.*). *Quod erat ſecundum.*

Anguli *e* & *f* ſunt anguli, qui fiunt a recta B*f* inſiſtente rectæ CD, adeoque *e* + *f* = 180 (§. 130); ſed *e* = *g per demonſtr. num.* 2. adeoque *e* + *f* = *f* + *g* (§. 14, 18 *Arith.*); ergo etiam *g* + *f* = 180 (§. 16 *Arith.*);

hoc eſt, g ✠ f = duobus rectis (§. 127.). *Quod erat tertium.*

Theorem. Tab. II. Fig. 37. 183. *Si duæ rectæ* B A *ſecantur a tertia* CD *in* f & l, *fueritque vel* m = g, *vel* e = g, *vel* f ✠ g = 2 *Rectis*, *erunt rectæ* B A *parallelæ.*

Demonſtratio. Ex *f* demittatur perpendicularis *f*K (§. 167) fiatque *n* O = K *l*, & ducatur *l* O. Cum ſit *m* = *g per hyp.* *fl* = *lf* (§. 14 *arith.*) *n* O = K *l per præpar.* erit *f*K = *l*O, & O = K (§. 136). Sed quia *f* K eſt perpendicularis *per præpar.* K eſt rectus (§. 67); ergo & O rectus eſt (§. 129), adeoque *l* O perpendicularis (§. 67). Igitur rectæ B A ſunt parallelæ (§. 178). *Quod erat primum.*

Si fuerit *e* = *g*, erit etiam *m* = *g* (§. 141 *Geom.* & §. 16 *Arith.*); ſed ſi *m* = *g*, rectæ B A ſunt parallelæ *per demonſtr. num.* 1. ergo etiam parallelæ erunt, ſi fuerit *e* = *g*. *Quod erat alterum.*

Si *f* ✠ *g* = 2 Rectis, cum ſit *f* ✠ *e* = 2 Rectis (§. 130), erit *f* ✠ *g* = *f* ✠ *e* (§. 16 *Arith.*), adeoque (§. 29 *Arith.*) *e* = *g*. Sed ſi *e* = *g*, rectæ B A ſunt parallelæ *per dem. n.* 2. Ergo etiam parallelæ ſunt, ſi *f* ✠ *g* = 2 rectis. *Quod erat tertium.*

184. Hinc

184. Hinc in campo rectæ BA commode ducitur parallela C e per datum punctum C, ſi Tab. II. Fig. 81.

1. In e figitur baculus in eadem recta cum baculis in B & A defixis: itemque baculus alius in C.

2. Angulus ABC transfertur in C (§. 113). Crus C e anguli C erit parallela quæſita (§. 183).

185. *Si fuerint duæ rectæ CA & DB perpendiculares ad eandem tertiam AB, erunt CA & DB parallelæ. Et ſi fuerint duæ rectæ parallelæ eidem tertiæ, erunt inter ſe parallelæ.* Theorema. Tab. III. Fig. 53.

Quoniam CA & DB ſunt perpendiculares ad AB *per hyp.* anguli A & B ſunt recti (§. 67), adeoque A + B = 2 rectis ſeu 180 (§. 127). Sed ſi duæ rectæ (CA & DB) ita ſecantur a tertia (AB), ut anguli interni ſint æquales 2 Rectis, rectæ illæ (CA & DB) ſunt parallelæ (§. 183). Ergo CA & DB ſunt parallelæ. *Q. e. unum.* Demonſtratio.

Sit AB parallela rectæ EF, & CD parallela rectæ EF; dico fore etiam AB parallelam rectæ CD. Cum enim ſint AB & EF parallelæ *per hypoth.* erunt æqualia perpendicula HL & GM inter eas intercepta (§. 178). Similiter ob parallelismum rectarum CD & EF *per hyp.* æqualia erunt perpendicula HI & GK (§. *cit.*). Quare ſi ab Tab. I. Fig. 12.

æqualibus HL & GM auferantur æqualia HI & GK, quæ remanent perpendicula IL & KM erunt æqualia (§. 29 *Arith.*). Quod cum valeat de perpendiculis quibuscunque ob easdem rationes, lineæ AB & CD erunt inter ſe parallelæ (§. 178). *Q. e. alterum.*

Theorem. Tab. II. Fig. 38. 186. *In quovis triangulo rectilineo* ut abc *tres anguli ſimul ſumti ſunt æquales duobus rectis* ſeu $a + b + c = 2$ R.

Demonſtratio. Per verticem trianguli b ducatur baſi ac parallela DE (§. 180, 181), erit $A = a$, $C = c$ (§. 182); adeoque $A + C = a + c$ (§. 18 *Arith.*); ideoque & $A + C + b = a + c + b$ (§. *cit.*). Porro $A + b + C$ ſunt anguli ſuper recta DE ad idem punctum b verſus eandem partem conſtituti *per hyp.* Sed anguli quotcunque ita conſtituti æquales ſunt duobus rectis (§. 130): ergo $A + b + C = 2$ R. Eſt autem $A + b + C = a + b + c$ *per dem.* Æqualia vero eidem tertiæ ſunt æqualia inter ſe (§. 16 *Arith.*). ergo $a + b + c = 2$ R. *Q. e. d.*

Coroll. 1. 187. Cum duorum rectorum menſura ſint 180° (§. 127), erunt $a + b + c = 180^{o}$.

188. Data ergo in gradibus quantitate ſeu ſumma duorum angulorum, hac ſubtracta a 180° relinquitur quantitas anguli tertii in triangulo rectilineo. Et ſi unus fuerit rectus, duo reliqui faciunt 90°. Unde ſi fuerint æquales, quilibet eſt ſemirectus ſeu 45°. Coroll. 2.

189. In triangulo rectilineo duo recti anguli eſſe nequeunt. Cum enim duo recti ſint æquales 180° (§. 127), nihil quantitatis angulo tertio relinqueretur. Multo minus duo anguli obtuſi in triangulo rectilineo locum habent (§. 51). Coroll. 3.

190. Data unius anguli quantitate reperitur ſumma duorum reliquorum. Coroll. 4.

191. Si duo anguli unius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius, etiam tertius unius æqualis erit tertio alterius (§. 29 *Arith.*). Coroll. 5.

192. In triangulo æquicruro dato uno angulo inveniri poteſt quilibet reliquorum (§. 175). Coroll. 6.

193. In triangulo æquilatero angulus quilibet eſt 60° (§. 177). Coroll. 7.

194. *Si latus quodcunque* (e. gr. a c) *trianguli rectilinei* abc *producitur in* d & *erit* Theorem. Tab. II. Fig. 39.

erit angulus externus d *æqualis duobus internis oppoſitis* a ✠ b.

Demonſtratio. Eſt enim *c* ✠ *d* = 180 (§. 130), eſt & (*a* ✠ *b* ✠ *c*) = 180 (§. 186). Ergo *a* ✠ *b* ✠ *c* = *c* ✠ *d* (§. 16 *Arith.*); igitur & *a* ✠ *b* = *d* (§. 29 *Arith.*). *Q. e. d.*

Theorema: Tab. I. Fig. 25. 195. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* AC = *ac &* A = *a*, B = *b*; *tota triangula ſunt æqualia, &* AB = *ab*, BC = *bc*.

Demonſtratio. Si enim fuerit A = *a*, B = *b per hyp.* erit etiam C = *c* (§. 91). Quare cum ſit porro AC = *ac per hyp.* erit △ ABC = △ *abc*, AB = *ab*, BC = *bc* (§. 137). *Q. e. d.*

Theorem. Tab. II. Fig. 40. 196. *Si fuerint anguli ad baſin* A *&* C *æquales; erit triangulum* ADC *æquicrurum.*

Demonſtratio. Secet recta DB angulum D bifariam, (§. 171); erit *o* = *x*, DB = DB. Sed eſt inſuper A = C *per hypoth.* Ergo AD = DC (§. 195), adeoque triangulum ADC æquicrurum (§. 71). *Q. e. d.*

Corollar. 197. Cum, quodcunque latus trianguli æquianguli pro baſi ſumatur, anguli ad baſin ſemper ſint æquales; *triangulum æquiangulum*, ſeu in quo anguli omnes ſunt inter ſe æquales, *eſt etiam æquilaterum.*

198. In

198) In quocunque circulo *angulus ad centrum* C *eſt duplus anguli ad peripheriam* B *eidem arcui* AD *inſiſtentis*; ſeu ſi crura anguli ad centrum & crura anguli ad peripheriam in eodem arcu ejusdem circuli terminantur, angulus ad centrum eſt duplus anguli ad peripheriam. Theorema. Tab. II. Fig. 41. 42. 43.

Triplex eſt caſus. Vel enim vertex anguli ad centrum cadit in crus alterutrum anguli ad peripheriam; vel inter duo hujus crura, vel extra crus hujus utrumque. Demonſtratio.

Cadat vertex C anguli ad centrum G in crus BA anguli DBA, qui eſt ad peripheriam, & inſiſtit cum angulo ad centrum arcui eidem DA. Cum C ſit centrum circuli *per hyp.* erunt CB & CD radii (§. 46) adeoque $CB = CD$ (§. 48), adeoque $\triangle BCD$ æquicrurum (§. 71). unde $e = f$ (§. 175). Eſt autem G externus angulus trianguli BCD, adeoque $G = e + f$ (§. 194); igitur ob $e = f$ *per dem.* $G = e + e = 2e$. *Quod erat primum.* Fig. 41.

Cadat vertex C anguli ad centrum inter crura anguli ad peripheriam B, & ducatur per verticem utriusque anguli recta BN. Erit $g = 2e$ & $h = 2i$ *per partem primam*. ergo $g + h =$ Fig. 42.

2 e

$2e + 2i$ (§. 18 *arith.*) ſeu ACD = 2 ABD. *Quod erat alterum.*

Fig. 43. Cadat vertex anguli C extra crus utrumque anguli B, ducaturque denuo per verticem utriusque anguli recta BE. Erit ECD = 2 EBD *per part.* 1. ſeu $g + h = 2i + 2l$ & ECA = 2 EBA *per eand.* ſeu $g = 2i$. Ergo $h = 2l$ (§. 29 *Arith.*) ſeu ACD = 2 ABD. *Q. e. tertium.*

Coroll. 1. 199. Arcus, cui inſiſtit angulus ad centrum, eſt menſura hujus anguli (§. 58). Quare cum is ſit duplus anguli ad peripheriam eidem arcui inſiſtentis (§. 198), *menſura anguli ad peripheriam eſt arcus dimidius, cui inſiſtit.*

Coroll. 2. 200. Quare *ſi plures anguli ad peripheriam eidem arcui vel etiam æqualibus arcubus inſiſtunt*, cum omnes pro menſura habeant eundem vel æqualem arcum dimidium, cui inſiſtunt (§. 199), *ii ſunt inter ſe æquales* (§. 82).

Coroll. 3. Fig. 44. 201. *Angulus* ABC, qui eſt *in Semicirculo*, ſeu qui diametro AC vel Semicirculo inſiſtit, habet pro menſura quadrantem circuli ſeu 90 (§. 199), adeoque *eſt rectus* (§. 127). Et omnes anguli in Semicirculo, quomodocunque ducti, cum ſint inter ſe æquales (§. 82), ſunt recti (§. 129).

202. *An*

202. *Angulus ad peripheriam* A *ſi in-ſiſtit arcui* BC, *qui minor eſt Semicircu-lo* ABC, habet pro menſura dimidium arcum BC (§. 199), adeoque minus quam 90°. Igitur minor *eſt* recto (§. 127), ergo *acutus* (§. 64). Coroll. 4. Fig. 44.

203. E contrario *angulus ad peripheriam* B, *qui inſiſtit arcui* ADC, *majori, quam ſit Semicirculus*, habet pro menſura dimidium arcum ADC ſeu arcum AD, adeoque plus quam 90°, adeoque angulus B *eſt* recto major (§. 127); ergo *obtuſus* (§. 64). Coroll. 5. Tab. III. Fig. 58.

203. Angulus *m* cum ſit externus trianguli BCD æqualis eſt duobus internis oppoſitis *n* & *o* ſimul ſumtis (§. 194). Sed arcus dimidius AD eſt menſura anguli *m*, arcus dimidius BE eſt menſura anguli *o* (§. 199). Ergo differentia arcuum $\frac{1}{2}$ AD & $\frac{1}{2}$ BE, ſeu $\frac{1}{2}$ AD — $\frac{1}{2}$ BE eſt menſura anguli *n*, ſeu ACD. Coroll. 6. Tab. I*. Fig. 13.

204. *Si duæ chordæ* HK & IL *ſe mutuo ſecant in* M; *erit* HM : IM = ML : MK. Theorema. Tab. I*. Fig. 11.

Eſt enim *x* = *x*, *t* = *t* (§. 200). Ergo HM : IM = ML : MK (§. 159). *Q. e. d.* Demonſtratio.

Problema. Tab. I*. Fig. 8. 205. *Examinare normam, an accurata ſit.*

Reſolutio. 1. Ducatur recta CD, & ex ejus puncto F deſcribatur Semicirculus CBD.

2. Ducantur ex punctis diametri extremis D, C rectæ ſibi occurrentes in peripheriæ puncto quodam B.

3. Applicetur normæ regula una ad rectam CB. Quodſi regula altera congruat rectæ BD, norma erit accurata.

Demonſtratio. Angulus enim CBD eſt in Semicirculo *per conſtr.* adeoque rectus (§. 201). Quare ſi eidem congruit angulus, quem normæ regulæ efficiunt, angulus normæ congruit angulo recto; adeoque huic æqualis eſt (§. 79); igitur & ipſe rectus (§. 129). Unde recta, quæ norma dirigente ducitur, erit ad alteram perpendicularis (§. 67); atque ideo norma eſt accurata (§. 166).

Problema. Tab. III. Fig. 45. 206. *In puncto extremo A rectæ AB erigere perpendicularem AE.*

Reſolutio. 1. In puncto C ad arbitrium electo figatur pes unus circini, & alter promoveatur usque ad datum punctum A.

2. Ex C intervallo CA ſecetur recta data AB in puncto D.

3. Per D & C ducatur recta, fiatque CE = CD.

4. Per

4. Per puncta A & E ducta recta A E erit perpendicularis ad A B.

Cum enim ſit CA = CD = CE *per conſtr.* ex centro C ſuper DE deſcripto Semicirculo, peripheria ejus tranſibit per puncta D, A, & E (§. 48); adeoque angulus D A E eſt angulus in Semicirculo, ergo rectus (§. 201). Unde E A perpendicularis ad A B (§. 67). Demonſtratio.

207. Idem præſtatur ope normæ (§. 166).

208. *In eodem circulo* ABED *ſi chordæ* AB *&* DE *ſunt æquales, etiam arcus cognomines* AB *&* DE *æquales ſunt; & viciſſim ſi arcus ſunt æquales, etiam chordæ, quæ eos ſubtendunt, ſunt æquales.* Theorema. Tab. III. Fig. 50.

Ducantur radii CA, CB, CD, CE, erunt hi omnes inter ſe æquales (§. 48); ſed etiam chordæ AB & DE ſunt æquales *per hyp.* ergo $g = f$ (§. 135), adeoque etiam arcus DE & AB, menſuræ angulorum f & g (§. 58) æquales erunt (§. 82). *Q. e. primum.* Demonſt.

Si fuerit arcus DE = arcui AB *per hyp.* cum hi arcus ſint menſuræ angulorum ad centrum f & g (§. 58); anguli quoque f & g æquales erunt (§. 82). Unde & chorda DE = chordæ AB (§. 136). *Q. e. alterum.*

209. *Ar-*

Problema. Tab. III. Fig. 47. 209. *Arcum datum* A B *bifariam ſecare.*

Reſolutio. 1. Ex punctis arcus extremis A & B fiant interſectiones in D & E.

2. Regula ad D & E applicata oſtendet punctum *n*, quod arcum biſecabit, ut ſit arcus A*n* = B*n* arcui.

Demonſtratio. Ducatur recta A B, itemque rectæ AE & BE, atque chordæ A*n* & B*n*. Per demonſtrationem problematis præcedentis (§. 169) liquet, rectam AB eſſe bifariam in C diviſam, ut ſit AC = BC, & angulum AED ſeu AE*n* æqualem eſſe angulo BED ſeu BE*n*; cumque ſit etiam E*n* = E*n*; erit chorda A*n* = B*n* chordæ (§. 136); erit igitur & arcus A*n* = B*n* arcui (§. 208). *Q. e. d.*

Theorema. Tab. III. Fig. 51. 210. *Si radius CA chordam DE bifariam ſecat, etiam arcum DAE ſecabit bifariam, & ad chordam DE perpendicularis erit:* & viciſſim *ſi radius CA ad chordam DE perpendicularis eſt; eam & arcum DAE ſecabit bifariam.*

Demonſtratio. Ducantur radii CD & CE, erit CD = CE (§. 48). Eſt autem & E*f* = D*g per hypoth.* & C*f* = C*g* (§. 14 *arith*). Ergo *f* = *g*, & EC*f* = DC*g* (§. 135), ſeu ECA = DCA, adeoque & arcus EA & DA, menſuræ angu-

gu-

gulorum ECA & DCA (§. 58), ſunt æquales (§. 82). *Q. e. primum.*

Porro $f = g$ *per demonſtr.* adeoque tam f quam g rectus (§. 130); ergo CA perpendicularis ad chordam ED (§. 67). *Q. e. ſecundum.*

Si CA perpendicularis ad chordam DE *per hypoth.* erunt anguli f & g recti (§. 67). Quare cum ſit porro CE = CD *per dem.* Cf = Cg (§. 14 *arith.*), erit etiam Ef = Dg, & DCg ſeu DCA = ECf ſeu ECA (§. 138), ergo & arcus EA & DA, angulorum ECA & DCA menſuræ (§. 58), inter ſe æquales (§. 82). Biſecat ergo radius CA perpendicularis ad chordam DE tam chordam quam arcum DE. *Q. e. tertium.*

211. *Si recta BA chordam ED ſecat bifariam, & ad eam perpendicularis eſt; tam arcum EBD quam arcum EAD ſecat bifariam, & per centrum tranſit.* Theorema.

Ducantur chordæ BD, BE. Quoniam BA chordam ED ſecat bifariam, & ad eam perpendicularis eſt *per hypoth.* erit Ef = Dg, & anguli f & g recti (§. 67), adeoque $f = g$ (§. 129). Quare cum ſit etiam Bf = Bg (§. 14 *Arith.*) erit BE = BD & EBf ſeu EBA = DBg ſeu DBA (§. 136); Demonſtratio.

adeoque & arcus BE = arcui BD (§. 208), & ½ arcus EA = ½ arcui DA (§. 82, 199), igitur & EA = DA (§. 17 *arith.*). Dividit ergo recta BA tam arcum EBD quam arcum EAD in duas partes æquales. *Q. e. primum.*

Porro quia arcus EB = BD & EA = DA *per demonſtr.* erit arcus BEA = BDA (§. 18 *arith.*); adeoque uterque ſemiperipheria circuli; ergo BA Diameter circuli (§. 125), ideoque per centrum tranſit (§. 45). *Q. e. alterum.*

Definitio. Tab. I. Fig. 12. & 13. Fig. 58. 212. *Figura rectangula* dicitur, cujus omnes anguli ſunt recti, ut ABCD: *obliquangula* vero, cujus omnes anguli ſunt obliqui, ut HILM. *Æquilatera* dicitur *figura*, cujus omnia latera ſunt inter ſe æqualia, ut ABDC. Fig. 12. 17. *Æquiangula*, cujus omnes anguli ſunt inter ſe æquales, ut Fig. 12.

Definitio. Fig. 12. 213. *Quadratum* dicitur figura quadrilatera, æquilatera, & rectangula, ut ABCD.

Definitio. Fig. 13. 214. *Rectangulum* ſeu *Oblongum* dicitur figura quadrilatera, & rectangula, cujus bina duntaxat oppoſita latera ſunt inter ſe æqualia: ut DEFG.

215. *Rhom-*

215. *Rhombus* appellatur figura qua- Definitio.
drilatera, æquilatera, obliquangula; Fig. 14.
ut HILM.

216. *Rhomboides* appellatur figura Definitio.
quadrilatera, obliquangula, cujus bi- Fig. 15.
na duntaxat oppoſita latera ſunt æqua-
lia, ut NORQ.

217. Reliquæ figuræ quadrilateræ, ut Definitio.
RSTV, appellantur *Trapezia*. Fig. 16.

218. Figura quadrilatera, cujus bi- Definitio.
na oppoſita latera ſunt parallela, ap- Fig. 12.
pellatur *Parallelogrammum*. & ſeqq.

219. Figura, quæ plura habet late- Definitio.
ra quam quatuor, appellatur *polygo-* Fig. 17. 18.
num: & quidem *pentagonum*, ſi latera
habet quinque, *hexagonum*, ſi ſex; *he-*
ptagonum, ſi ſeptem habet latera &c.

220. *Figura* æquilatera & æquian- Definitio.
gula appellatur *regularis* ſeu *ordinata* ut Fig. 17.
ABCDEF. Ex adverſo *irregularis* vel
inordinata dicitur, cujus vel ſingula la- Fig. 18.
tera vel ſaltem ſinguli anguli non ſunt
æquales.

221. Si peripheria circuli ABCDEF Corollar.
dividitur in partes ſeu arcus æquales Fig. 17.
AB, BC &c. chordæ ſeu latera figuræ
AB, BC &c. ſunt æqualia (§. 208);
ergo ABCDEF eſt figura æquilatera
(§. 212). Sed etiam anguli A, B,

G &c. ſunt æquales. Angulus enim quilibet eſt ad peripheriam, & inſiſtit totidem arcubus æqualibus quot alter; adeoque eſt cuilibet alteri æqualis (§. 200). Fig. 17. Sit angulus A inſiſtit arcubus æqualibus FE, ED, DC, CB; & duos horum arcuum habet pro menſura (§. 199); idem de angulo B, C, D &c. dici poteſt. Ergo figura ABCDEF eſt etiam æquiangula (§. 212). Quare cum ſit & æquilatera & æquiangula per *demonſtrata*, eſt *figura regularis* (§. 220).

Problema. Fig. 52. Tab. III. 222. *Per tria puncta* A, B, C, *non in directum*, ſeu in eadem linea recta, *jacentia, circulum deſcribere.*

Reſolutio. 1. Ex *A* & *B* intervallo arbitrario ope circini duc arcus ſe ſe interſecantes in E & D.

2. Similiter ex B & C duc arcus ſe ſe interſecantes in F & G.

3. Duc rectas ED & FG per puncta interſectionum. Hæ ſe interſecabunt in H. Dico fore centrum circuli per puncta A, B, C ducendi in H.

Demonſtratio. DE eſt perpendicularis ad AB, atque chordam AB ſecat bifariam (§ 169, 130); adeoque per centrum tranſit (§. 211). Similiter GF eſt perpendicularia

ris ad chordam BC, eamque biſecat (§. 169, 130); adeoque & ipſa per centrum tranſit (§. 211). Eſt ergo centrum circuli tam in recta DE, quam in recta GF *per dem.* adeoque non niſi in H, ubi duæ hæ rectæ conjunguntur. *Q. e. d.*

223. *Invenire angulum ABC polygoni regularis.* Problema. Fig. 58. Tab. III.

Sume angulum ABC polygoni regularis eſſe inventum ſeu in charta deſcriptum. Duc per ejus verticem B & laterum extremitates A & C, utpote tria puncta, peripheriam circuli ABCD (§. 222). Erit arcus ADC dimidium, ſeu arcus AD menſura anguli polygoni B (§. 199). Reſolutio & Demonſtr.

Quoniam vero in polygono regulari latera ſingula ſunt æqualia (§. 210), erit chorda AB = chordæ BC, adeoque & arcus AB = arcui BC (§. 208).

Quare cum ſit etiam AD = DC *per hyp.* erit DAB peripheria ſemicirculi. Quare ut invenias arcum AD, menſuram anguli polygoni *per demonſtrata,*

1. Divide peripheriam circuli ſeu 360 per numerum laterum polygoni regu-

regularis, quotus erit arcus AB. Porro

2. Quotum inventum ſubtrahe a 180; reſiduum erit arcus AD, menſura ſeu quantitas quæſita anguli in polygono regulari.

224. E. gr. Si quæritur quantitas anguli in pentagono regulari. Dividuntur 360 per 5, numerum laterum pentagoni; quotus 72 ſubtrahitur ex 180. Reſiduum 108 inditat, angulum quemlibet pentagoni regularis complecti 108 gradus.

Problema. 225. *Invenire ſummam angulorum cujuslibet polygoni ſive regularis ſive irregularis.*

Fig. 59. Tab. III.

Reſolutio & demonſtratio. Quodlibet polygonum ex puncto intra illud aſſumto G in tot triangula poteſt dividi, quot ſunt latera, ut in AGB, BGC &c. Quare cum ſumma angulorum cujuslibet trianguli ſit 180 (§. 187); anguli autem circa G conſtituti, qui ſimul ſumti ſunt 360 (§. 132), ad angulos polygoni non pertineant.

1. Multiplica 180 per numerum laterum polygoni.

2. A

2. A facto ſubtrahe 360. Reſiduum erit ſumma quæſita angulorum polygoni.

226. Quoniam bis 180 æquant 360, a numero laterum polygoni ſubtrahe 2, per reſiduum multiplica 180; factum erit ſumma quæſita. Hoc ipſum quoque inde conficitur, quod quodlibet polygonum per lineas diagonales CB in tot triangula reſolvi poſſit, quot ſunt latera demtis duobus. Coroll. 1. Tab. III. Fig. 61.

227. Cum anguli ſinguli in polygono regulari ſint æquales, data ſumma angulorum polygoni, invenitur quantitas unius in polygono regulari, diviſa ſumma per numerum laterum. Coroll. 2.

228. Summa omnium angulorum polygoni ſervit ad examinandas dimenſiones arearum a nobis vel aliis in campo inſtitutas; & notitia anguli unius in polygono regulari facit ad polygoni hujus deſcriptionem. Unde utrumque ſequens tabella oſtendit.

Numerus laterum.	Sum̃a angulor.	Ang. Polyg. Reg.	Numerus laterum.	Sum̃a angulor.	Angul. Polyg. Reg.
III.	180	60	XI.	1620	$147\frac{3}{11}$
IV.	360	90	XII.	1800	150
V.	540	108	XIII.	1980	$152\frac{4}{13}$
VI.	720	120	XIV.	2160	$154\frac{2}{7}$
VII.	900	$128\frac{4}{7}$	XV.	2340	156
VIII.	1080	135	XVI.	2520	$157\frac{1}{2}$
IX.	1260	140	XVII.	2700	$158\frac{14}{17}$
X.	1440	144	XVIII.	2880	160

Problema. 229. *Dato circulo ABCDE polygonum regulare inſcribere.*
Fig. 59. Tab. III.

Reſolutio. 1. Divide 360 per numerum laterum polygoni, e. gr. per 5. Quotus erit arcus AB, ſeu menſura aut quantitas anguli ad centrum AGB (§. 58).

2. Hoc ergo ad centrum G conſtructo (§. 113), reperitur AB, latus unum polygoni, toties in reliquam peripheriam circuli transferendum, quoties id fieri poteſt.

Problema. 230. *Super data recta AB polygonum regulare conſtruere.*

Reſolutio. 1. Quære angulum polygoni (§. 228).
Fig. 58. Tab. III.

2. Eum conſtrue ad punctum B (§. 113).

3. Ine

3. Fac BC = AB.

4. Per puncta A, B, C duc circuli peripheriam (§. 222).

5. In hac diſpone reliqua figuræ regularis latera (§. 229).

1. Quære angulum polygoni (§. 223). Reſolutio alia.

2. Ad rectæ AB extrema A & B Fig. 60. conſtrue angulos, æquales ſingulos dimidio anguli polygoni (§. 113). Horum crura AC & BC ſe interſecabunt in centro C.

3. Ex C radio CA deſcribe circuli peripheriam; & in hac diſpone per ordinem latera reliqua polygoni.

231. *Latus BC hexagoni regularis circulo inſcripti æquale eſt radio circuli GC.* Theorema.

Quoniam BC eſt latus hexagoni re- Fig. 17. gularis circulo inſcripti *per hyp.* arcus Tab. I. BC, quem latus hexagoni ſubtendit, Demonſtratio. eſt ſexta pars peripheriæ circuli ſeu ex. 360 (§. 208, 220), adeoque eſt 60. Quare cum idem arcus BC ſit menſura anguli G (§. 58), angulus G erit 60; adeoque duo reliqui in triangulo BGC ſimul ſumti æquant 120 (§. 187); cumque GB & GC ſint radii (§. 46), adeoque inter ſe æquales (§. 48), erit triangulum BGC æquicrurum (§. 71);

unde anguli ad baſin B & C ſunt æquales (§. 175). Eorum ergo quilibet eſt 60 *per demonſtr.* æque ac angulus G, Triangulum igitur BGC eſt æquiangulum (§. 212), ergo & æquilaterum (§. 157). Latus igitur hexagoni regularis BC = GC radio circuli. *Quod erat demonſtr.*

Coroll. 1. 232. Circulo ergo cuicunque hexagonum regulare inſcribas, ſi radium in ejus peripheriam ſexies per ordinem transferas.

Coroll. 2. Tab. I. Fig. 17. 233. Si ſuper recta data BC hexagonum regulare conſtruendum; ſuper ea erige triangulum æquilaterum (§. 90); erit vertex hujus trianguli G centrum circuli ABCDEF; quo deſcripto & dirigente latera hexagoni, reliqua per ordinem diſponi poſſunt.

Problema. Fig. 53. Tab. III. 234. *Super data recta AB Quadratum conſtruere.*

1. Erige in puncto A perpendicularem (§. 206).

2. Fac AC = AB.

3. Ex C & B intervallo AB fac arcus ſe interſecantes in D.

4. Duc rectas CD & BD, erit ABDC quadratum.

ABDC

ABDC eſſe figuram quadrilateram & æquilateram patet *per conſtructionem*; eſſe autem rectangulam ſic demonſtratur. Duc ex C in B diagonalem CB. Quoniam AC eſt perpendicularis ad AB *per conſtruct.* erit A rectus (§. 67); ideoque ob AC = AB *per eand.* *o* = *m* (§. 135), & ob rectum A *per dem.* quilibet eorum ſemirectus (§. 186), ſeu 45 (§. 127). Porrò in triangulis ACB & DCB latus CB eſt commune, AC = CD, AB = BD *per conſtr.* Ergo D = A, *x* = *o*, *n* = *m*. Igitur D quidem eſt rectus (§. 129), *x* & *n* ſunt pariter ſemirecti ſeu eorum quilibet 45 (§. 186, 127). Ergo *o* + *x* = 90, & *m* + *n* = 90, ſeu C = 90, B = 90. Igitur non modo A & D ſunt recti *per dem.* ſed etiam C & B (§. 127). Figura igitur ABDC eſt rectangula (§. 212) pariter ac quadrilatera & æquilatera. Ergo quadratum (§. 213). *Q. e. d.* Demonſtratio.

235. *Octogonum regulare datæ altitudinis ſeu latitudinis conſtruere* docet Clavius in hunc modum. Fig. [illegible] Tab. [illegible]

Sit altitudo ſeu latitudo data AB.

1. Super AB conſtruatur quadratum ABCD, [illegible]

2. Du

2. Ducantur diagonales AC, BD, ſeſe intersecantes in E.

3. Intervallo AE ex ſingulis quadrati angulis ſint utrinque interſectiones, ex A quidem in F & G, ex B in K & L, ex C in M & N, ex D in I & H.

4. Ducantur rectæ KH, GM, LI, FN. Et *factum eſt, quod petebatur.*

Pulcherrimam hanc praxin appellat Clavius, quod nullam requirat diviſionem circuli in 8 partes æquales, & octogonum regulare deſcribere doceat ad datam altitudinem ſeu latitudinem: Accepit eam a quodam architecto, ſed absque demonſtratione, quam adjecit ipſe Geom. pract. lib. 8 propoſitione 63.

Problema. Fig. 54. Tab. III. 236. *Datis duabus rectis* AB & AC *rectangulum ſeu oblongum* ABDC *conſtruere.*

1. Fac AC perpendicularem ad AB (§. 206).

2. Ex C intervallo AB duc arcum in D.

3. Ex B intervallo AC duc alium arcum, qui priorem interſecet in D.

4. Duc rectas CD, BD. Erit ABDC Rectangulum.

Demonſtratio. Quoniam CA perpendicularis ad AB *per conſtr.* A eſt rectus (§. 67). Porro in triangulis ACB & DCB eſt BC latus commune, AC = BD, CD = AB *per conſtr.* Ergo D = A, x = n, m = o (§. 135). Sed A eſt rectus *per* dem.

dem. ergo & D rectus (§. 129), & o ✠ n = recto, x ✠ m = recto (§. 186). Quare cum ſit x = n per dem. erit o ✠ x = o ✠ n (§. 18 arith.) adeoque o ✠ x = recto (§. 16 arith.). Eodem modo oſtenditur eſſe ob x = n & x ✠ m = recto per dem. etiam n ✠ m = recto. Sunt ergo tam A & D quam B & C recti per dem. unde ABCD eſt figura rectangula (§. 212), quadrilatera autem ac bina oppoſita latera habens æqualia per conſtr. Ergo ABCD eſt *rectangulum* ſeu oblongum (§. 214). Q. e. d.

237. *Data recta* BD & *angulo obliquo* D *Rhombum* DCAB *conſtruere.* Problema. Tab. III. Fig. 55.

Reſolutio.

1. Ad punctum D datæ BD fac angulum dato D æqualem (§. 113).
2. Fac DC = BD.
3. Intervallo DB ex B & C duc arcus ſe interſecantes in A.
4. Due rectas BA & CA.

238. *Datis rectis* AB & AC *cum angulo obliquo* A *conſtruere Rhomboidem* CABD. Problema. Tab. III. Fig. 56.

Reſolutio.

1. Ad punctum A rectæ AB conſtrue angulum dato A æqualem (§. 113).

2. Ine

2. Intervallo AC duc ex B arcum in D; & intervallo AB duc alium arcum ex C, qui priorem interſecet in D.
3. Denique duc rectas BD & CD.

Theorema. Tab. III. Fig. 57. 239. *Quadratum, Rectangulum, Rhombus & Rhomboides* 1. *a Diagonali CB ſecantur in duas partes aequales, ſeu* $\triangle$ *ACB* = $\triangle$ *CBD.* 2. *Anguli oppoſiti ſunt aequales, ſeu* A = D, C = B. 3. *Bina latera oppoſita ſunt parallela, AC ipſi BD, & CD ipſi AB.*

Demonſtratio. In omnibus his figuris AB = CD, AC = BD & diagonalis CB = BC (§§. 213 & ſeqq.). Ergo $\triangle$ ACB = $\triangle$ CBD, A = D, $o = n$, $m = x$ (§. 135); adeoque $m + o = n + x$ ſeu C = B (§. 18 *arith.*), & CD parallela ipſi AB, AC parallela ipſi BD (§. 183). *Q. e. d.*

Corollar. 240. Igitur quadrata omnia, rectangula, rhombi & rhomboides ſunt parallelogramma (§. 218).

Theorem. Tab. III. Fig. 57. 241. *Parallelogrammum quodvis ACDB,* 1. *per diagonalem CB dividitur in duas partes aequales,* 2. *angulos oppoſitos habet aequales, &* 3. *latera oppoſita aequalia.*

Demonſtratio. Quoniam ACDB eſt parallelogrammum *per hyp.* erit CD parallela ipſi AB, & AC parallela ipſi BD (§. 218); adeoque

que $m = x$, $o = n$, (§. 182), & CB = BC. Ergo $\triangle$ ACB = $\triangle$ DBC, A = D, AB = DC, AC = BD (§. 137). Q. e. d.

242. *Datis omnibus figuræ lateribus, & tot diagonalibus, quot ſunt latera demtis tribus, figuram conſtruere.* Problema. Tab. III. Fig. 61.

Cum figura omnis per diagonales in tot triangula dividi poſſit, quot ſunt latera demtis duobus, non opus eſt, niſi ut ex datis triangulum triangulo ſuperſtruas (§. 108). Reſolutio.

243. *Datis omnibus figuræ angulis præter unum, & lateribus omnibus præter duo conjuncta (quæ nempe reliquum efficiunt angulum, & figuram claudunt), figuram deſcribere.* Problema. Tab. III. Fig. 62.

1. Duc rectam AB, uni datorum laterum æqualem. Reſolutio.

2. Ad A & B conſtrue angulos ipſi adjacentes (§. 113); & ducere licet AC ac BF.

3. Similiter ad C conſtrue angulum convenientem, & duc CD.

4. Idem fac ad D & E; occurretque tandem ducta EF rectæ BF in F, terminabitque figuram.

244. Simili ratione ſi intervallo duorum ultimorum laterum BF & EF fiat Corollar.

interſectio ex B & E in F; conſtrui poteſt figura datis omnibus lateribus, & tot angulis, quot ſunt latera demtis tribus.

Problema. Tab. IV. Fig. 63. 245. *Invenire aream quadrati.*

Reſolutio. 1. Inveſtiga ſeu metire latus quadrati BD.

2. Multiplica quantitatem inventam per ſe ipſam. Factum erit area quadrati.

E. gr. Si latus quadrati BD = 5'', ſeu 5 digitorum longitudinis: fac 5 . 5 = 25. Erit area quadrati 25 digitorum quadratorum, ſeu in longum & latum æqualiter ſe ſe porrigentium.

Sit latus quadrati = 576''

	576
	3456
	4032
	2880
Area quadrati =	331776''

Demonſtratio. Ad dimetiendas ſuperficies planas plana quoque ſuperficie opus eſt, quæ ſit planorum menſura. Præfertur planis ceteris quadratum, cujus & latera omnia ſunt æqualia, & anguli omnes recti. Unde decempeda vel pertica quadrata dicitur planum, quod in longitudinem æque ac lati-

tudi-

tudinem decem pedibus aut 12 porrigitur; pes quadratus eſt planum in longum & latum ſeſe porrigens ad ſpatium pedis unius &c. Aream igitur quadrati ABDC inveſtigantes quærimus quot quadratula digitum unum lata & longa quadratum ABDC contineat. Quodſi latus BD in quinque digitos dividatur latus BA = BD pariter in 5 digitos dividi poterit. Tot ergo ſeries quadratulorum prodibunt, quot latus BA habet digitos, id eſt, quinque & in qualibet ſerie tot erunt quadratula, quot latus BD habet digitos, id eſt, denuo quinque. Ergo quadratum BACD habebit univerſim quinquies quinque quadratula digitum unum longa & lata. Invenitur ergo area quadrati BACD multiplicando latus BD = $5''$ per ſe ipſum, ut fiat $5'' . 5'' = 25''$ ſeu 25 digiti quadrati. Cum eodem modo area quadrati inveniatur multiplicando latus BD per ſe ipſum, in quotcunque & quantascunque partes æquales latus quadrati BD concipiatur diviſum, patet univerſe aream quadrati reperiri multiplicando latus quadrati per ſe ipſum. Q. e. d.

Coroll. 1. 246. Si latus quadrati eſt 10, erit area 100 (§. 245). Quare cum in Geometria pertica ſeu decempeda dividatur in 10 pedes: pes in 10 digitos &c. (§. 27); pertica ſeu decempeda quadrata eſt 100 pedum quadratorum; pes quadratus continet 100 digitos quadratos &c.

Coroll. 2. 247. Unde datus quilibet numerus facile reſolvitur in lineas, digitos, pedes, & perticas quadratas, ſi nempe a dextra ſiniſtrorſum duæ primæ notæ lineis, duæ aliæ digitis, duæ ſequentes pedibus, reliquæ quæ ſuper ſunt perticis tribuantur. Sic $23\overset{\circ}{4}5\overset{\prime}{6}7\overset{\prime\prime}{8}9\overset{\prime\prime\prime}{3}$ lineæ quadratæ dant 234 perticas quadratas, 56 pedes quadratos, 78 digitos quadratos, & demum 93 lineas quadratas.

Coroll. 3. 248. Si latus quadrati eſt 12, area erit 144. Quare cum in vita communi pertica dividatur in 12 pedes, pes in 12 digitos &c. (§. 29), pertica quadrata continet 144 pedes quadratos, pes quadratus 144 digitos &c.

Coroll. 4. 249. Communiter in geometria practica utuntur pertica more geometrarum in 10 pedes &c. diviſa; ſed poſtquam area agri, prati &c. in perticis & pe-

pedibus geometricis fuit reperta reducitur ad uſitatos eo fere modo, quo ſupra pedes regionis unius transferre docuimus in pedes regionis alterius (§. 35).

250. Cum quadratum aſſumtum fuerit pro menſura planorum, figuram quadrare idem eſt ac ejus aream ſeu areæ quantitatem inveſtigare. Unde *Quadratura circuli* eſt exacta quantitas areæ, quam circuli peripheria circumſcribit.

251. *Aream rectanguli* BADC *invenire.* Problema. Tab. IV. Fig. 64.

Reſolutio.

1. Metire latitudinem BC, & altitudinem BA.

2. Multiplica BC per BA. Factum erit area rectanguli quæſita (§. 245).

252 Nempe ſi latitudo eſt 6", altitudo 3", erunt tres ſeries quadratulorum, quæ digitum unum ſint lata & alta; in qualibet autem ſerie ſex ejusmodi quadratula. Unde univerſim ter ſex ſeu 3 . 6 = 18. Atque ita de ceteris.

E. gr. Sit BC = 765"
BA = 23"

		2295
		1530
erit	Area =	17595

253. *Duo parallelogramma* ABCD *&* FBCG, *quæ eandem baſin* BC, *& eandem* Theorema. Tab. IV. Fig. 65.

dem altitudinem AB *vel* DC *habent, ſunt inter ſe æqualia.*

Demonſtratio. In parallelogrammis bina latera oppoſita ſunt æqualia (§. 241). Ergo eſt AB = DC, FB = CG, AD = BC & FG = BC; adeoque AD = FG (§. 16 *Arith.*). Unde & AD + DF = DF + FG (§. 18 *arith.*), ſeu AF = DG. Erit ergo in triangulis ABF & DCG, AB = DC, BF = CG, AF = DG *per dem.* unde △ ABF = △ DCG. Utriusque hujus trianguli pars comunis eſt triangulum DEF. Quodſi ergo hoc ab utroque auferatur; erunt reſidua trapezia æqualia ſeu ABED = CEFG (§. 29 *Arith.*). Addatur utrique trapezio triangulum BEC, fient ex trapeziis æqualibus parallelogramma ADCB & CBFG inter ſe æqualia (§. 18 *Arith.*). Q. e. d.

Corollar. 254. Cum parallelogramma ABCD & BCGF per diagonales AC & GB dividantur in duas partes æquales (§. 241), adeoque triangula ABC & GBC æqualem baſin BC & altitudinem AB habentia ſint dimidia parallelogramorum ſeu totorum æqualium (§. 253); *triangula* ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta, ſeu *eandem baſin & altitudinem habentia ſunt inter ſe æqualia.* (§. 45 *arith*).

255. Nem-

255. Nempe parallelarum diſtantiam perinde ac triangulorum altitudinem metitur perpendicularis eadem. Unde triangula inter easdem parallelas conſtituta eandem altitudinem habent, ſeu eandem diſtantiam verticis a baſi.

256. *Triangulum* quodlibet *eſt dimidium parallelogrammi eandem baſin & altitudinem habentis*, ſeu ſuper eadem recta & inter easdem parallelas conſtituti. Coroll. &c.

257. *Aream Rhombi* ABCD *invenire.* Problema.

1. Ex angulo rhombi A demittatur perpendicularis AE. hæc erit altitudo rhombi. Tab. IV. Fig. 66. Reſolutio.

2. Metire tam AE, quam latus rhombi BC (§. 31 &c.).

3. Multiplica AE per BC. Factum erit area rhombi.

Eſt enim rhombus ABCD parallelogrammum æquale rectangulo, cujus baſis BC altitudo AE (§. 239, 253): ſed area rectanguli invenitur multiplicando BC per AE (§. 251). Ergo eadem ratione invenitur area rhombi *Q. e. d.* Demonſtratio.

258. E. gr. Sit BC = 49
AE = 50

Erit rhombi area = 2450.

259. Cum rhomboides quoque ſit parallelogrammum æquale rectangulo eandem Corollar. Tab. IV. Fig. 65.

dem baſin & altitudinem habenti (§. 240, 253), *area rhomboidis eodem modo invenitur, quo area rhombi* (§. 257).

Problema. Tab. IV. Fig. 67. 260. *Invenire aream trianguli* BAD.

Reſolutio. 1. Ex vertice trianguli A in ejus baſin BD (productam ſi opus fuerit) demitte perpendicularem AC, quæ erit altitudo trianguli.

2. Metire baſin BD, & altitudinem AC (§. 31 &c.)

3. Multiplica BD per AC. Factum divide per 2. Erit quotus area trianguli quæſita.

Demonſtratio. Triangulum quodlibet eſt dimidium parallelogrammi eandem baſin & altitudinem habentis (§. 256); area ergo trianguli invenitur, ſi area parallelogrammi eandem baſin & altitudinem cum triangulo habentis quæritur, & inventa bifariam dividitur: Atqui area cujuslibet parallelogrammi reperitur multiplicando baſin per altitudinem (§. 245 & ſeqq.). Ergo area trianguli reperitur factum ex baſi in altitudinem dividendo per 2. Q. e. d.

Corollar. 261. Invenitur etiam area trianguli multiplicando vel baſin dimidiam per totam altitudinem, vel dimidiam altitudinem per totam baſin; ut ſequens exemplum oſtendit.

Sit

Sit baſis BD = 244''
altitudo AC = 82, fiet

BD = 244''	$\frac{1}{2}$ BD = 122	BD = 244
AC = 82''	AC = 82	$\frac{1}{2}$ AC = 41
488	244	244
1952	976	976
2) 20008	△ BAD = 10004	△ BAD = 10004

△ BAD = 10004.

262. *Data area & baſi trianguli invenire ejus altitudinem.* Problema.

Area dividatur per dimidiam baſin, Reſolutio. erit quotus altitudo trianguli (§. 261 *Geom.* & §. 111 *Arith.*).

263. Si area dividitur per baſin integram, quotus eſt altitudo dimidia. Eſt hæc ratio inveniendi altitudinem non nunquam magis expedita.

264. *Invenire aream cujuſlibet figuræ rectilineæ*, ut ABCDE. Problema. Tab. IV. Fig. 68.

Cum figura rectilinea quælibet ut ABCDE per diagonales BE, BD dividi poſſit in triangula; non opus eſt, niſi ut per problema præcedens (§. 260, 261) aream ſingulorum triangulorum inveſtiges, & ea tandem in unam ſummam redigas. Sic enim obtinebitur area quæſita. Reſolutio.

 Si

Si duæ altitudines ut Af & Dg inſiſtunt eidem baſi BE, trapezium ABDE eadem opera inveniri poteſt, multiplicando dimidiam baſin BE per ſummam altitudinum $Af + Dg$; vel baſin BE ducendo in dimidiam ſummam dictarum altitudinum.

Sit BE = 52 Af = 12	BE = 52 Dg = 20	BD = 45 Ch = 10
104	2) 1040	2) 450
52	△ BDE = 520	△ BCD 225
2) 624	△ BCD = 225	
△ ABE = 312	△ ABE = 312	
	ABCDE = 1057	

Theorema. Tab. III. Fig. 59. 265. *Polygonum regulare ex centro circuli circumſcripti* ABCDE *in tot triangula inter ſe æqualia dividi poteſt, quot habet latera.*

Demonſtratio. Cum enim polygonum ſit regulare *per hyp.* latera ejus omnia AB, BC &c. inter ſe ſunt æqualia (§. 220). Sunt autem latera cetera triangulorum, ut GA, GB &c. radii ejusdem circuli *per hypoth.* Ergo hi quoque omnes inter ſe ſunt æquales (§. 48). Igitur & △ AGB = △ BGC = △ CGD &c. (§. 135). *Q. e. d.*

226. Area

266. *Area igitur polygoni regularis inventur*, ſi 1. quæritur area unius trianguli, ut DGE (§. 260, 261); 2. inventa multiplicatur per numerum laterum polygoni. Factum erit area quæſita (§. 265). Coroll. 1.

Sit ED = 25'' △ EGD = 21250'''
GF = 17 Num. later. = 5

175 ABCDE = 106250'''
25

2) 425

△ EGD = 21250'''.

267. *Polygonum ergo regulare æquale eſt triangulo* AFG, *cujus baſis* AG *æquat ſummam laterum ſeu perimetrum polygoni regularis, altitudo autem* AF *altitudinem* GF *unius triangulorum, in quæ* polygonum regulare *ex centro circuli circumſcripti dividi poteſt.* Sint enim A*a*B, B*b*C, C*c*D, D*d*E, E*e*G triangula, in quæ ex centro circuli circumſcripti polygonum reſolvitur. Altitudo communis horum triangulorum ſit AF, erunt triangula AFB = A*a*B, BFC = B*b*C, CFD = C*c*D, DFE = D*d*E, EFG E*e*G (§. 254); adeoque triangulum AFG, cujus triangula AFB, BFC, CFD &c. ſunt partes omnes, adeoque Coroll. 2. Tab. IV. Fig. 69. & Tab. III. Fig. 59. Tab. IV. Fig. 69.

quod ipſis ſimul ſumtis æquale eſt (§. 21 *Arith.*), erit etiam æquale omnibus triangulis, in quæ polygonum reſolvitur, ſimul ſumtis (§. 18 *Arith.*), ideoque AFG = polygono regulari.

Theorema. 268. *Circulus æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

Demonſtratio. Tab. III. Fig. 59. Concipiatur circulo inſcriptum polygonum regulare laterum minimorum, ſeu adeo exiguorum, ut latus quodlibet ab arcu peripheriæ, quem ſubtendit, ſenſu etiam acutiſſimo diſcerni nequeat, latuſcula hujus polygoni a peripheria defectu aſſignabili non different, neque altitudo triangulorum, in quæ tale polygonum reſolvi conciperetur, defectu aſſignabili differet a radio circuli; adeoque neque polygonum ejusmodi regulare defectu aſſignabili differet a circulo. Erit igitur circulo æquale. Quare cum polygonum laterum adeo exiguorum æquale ſit triangulo, cujus baſis peripheria circuli, altitudo radius (§ 267); etiam circulus æqualis erit triangulo, cujus baſis peripheriæ, altitudo radio æqualis (§. 16. *Arith.*). Q. e. d.

Corollar. Tab. I. Fig. 20. 269. Sector ergo circuli HGL æqualis erit triangulo, cujus baſis arcui HL æqualis, altitudo radio HG.

270. Da-

270. Data ergo diametro & peripheria circuli invenitur area circuli multiplicando peripheriam quarta parte diametri (§. 261). Coroll. 2.

271. Illud difficultate non caret, quomodo ex diametro peripheria inveſtigari queat. Modus eam inveniendi aliquis occurret in Trigonometria. Alius modus eſt quærendo latera minora & minora polygonorum inſcriptorum &c. qui ut intelligi poſſit, ſequentia præmittenda ſunt, theoremata & problemata.

272. *In triangulo rectangulo BAC quadratum hypothenuſæ BC æquale eſt quadratis reliquorum laterum BA & CA ſimul ſumtis.* Theorem. Tab. IV. Fig. 73.

Superſtruantur ſingulis lateribus trianguli BAC convenientia quadrata. Ex anguli recti A vertice demittatur perpendicularis A*m* (§. 167). Cum quadratum quodlibet ſit parallelogrammum (§. 240), erunt BC & ED parallelæ (§. 218). Quare cum perpendicularis ad parallelarum unam ſit etiam perpendicularis ad alteram (§. 179), erunt in *l* & *m* anguli recti (§. 67). Quare cum ſint etiam D & C, itemque E & B recti (§. 213), erit *m l* parallela ipſis DC & EB (§. 183), & tam DC *lm*, quam *ml* BE parallelogrammum (§. 218). Demonſtratio.

De-

Demonſtrandum eſt 1. parallelogrammum $DmlC$ æquale eſſe quadrato ACIH. Ducantur DA & IB. △ DCA inſiſtit eidem baſi DC cum parallelogrammo $DmlC$, & eſt inter easdem parallelas, adeoque △ DCA = ½ $DmlC$ (§. 256). △ BCI inſiſtit eidem baſi CI & eſt inter easdem parallelas cum quadrato, adeoque parallelogrammo (§. 240) ACIH. Ergo △ BCI = ½ □ ACIH (§. 256). Porro anguli DCB & ACI ſunt anguli in quadrato *per hyp.* adeoque recti (§. 213), ergo DCB = ACI (§. 129). Quare ſi utrique addatur communis angulus BCA, erit DCA = BCI (§. 17 *Arith.*). Eſt autem & DC = CB, & CA = CI (§. 213). Ergo △ DCA = △ BCI (§. 236). Igitur & ½ $DmlC$ = ½ □ ACIH (§. 16 *Arith.*). Unde tandem infertur $DmlC$ = □ ACIH (§. 18 *Arith.*).

Eodem modo demonſtratur eſſe parallelogrammum $EmlB$ = □ ABFG. Unde concluditur, □ BCDE = □ ACIH + □ ABFG. *Q. e. d.*

273. Theorema hoc appellatur pythagoricum a Pythagora, qui ejus demonſtrandi modum invenit, cum antea ejus veritas duntaxat in caſu ſingulari conſtaret. Nempe notum erat hypothenuſam eſſe 5, ſi latus unum trianguli rectanguli ſit 3, alterum 4. Eſt autem 5. 5 =

5 = 25 quadratum hypothenuſæ. 3 . 3 = 9, quadratum lateris unius. 4 . 4 = 16 quadratum lateris alterius. Sed 25 = 9 + 16. Uſus theorematis pythagorici per univerſam matheſin reliquam eſt ampliſſimus; aliquem uſum mox oſtendemus.

274. *Quadratum conſtruere quod ſit duabus vel pluribus aliis ſimul ſumtis æquale.* Problema. Tab. IV. Fig. 74.

1. Latera quadratorum A C & A B jungantur ad angulum rectum B (§. 166); hypothenuſa AC erit latus quadrati, quod ſit æquale datis A & AB ſimul ſumtis (§. 272). Reſolutio.

2. Erigatur A C perpendicularis ad AD (§. 166), ducaturque DC. Erit DC latus quadrati, quod ſit æquale tribus quadratis A, AB, & DA ſimul ſumtis (§. 272). Atque ita porro quo usque placuerit progredi.

275. Si fuerit AB = B 1 = 1, erit A 1 = √2 (§. 71 *arith.*); ſi porro fiat B 2 = A 1, erit A 2 = √3 (§. *cit.*). Lineis ergo diſtincte exprimi poſſunt quantitates, quas numeris diſerte exprimere non poſſumus. Corollar. Tab. VII. Fig. 107.

276. *Dato radio* n E, *& chorda* A B *invenire chordam* n B *arcus dimidii.* Problema. Tab. III. Fig. 47.

1. Ex centro E ducatur perpendicularis EC ad chordam AB (§. 167); erit AC = BC, arcus A *n* = B*n* (§. 210). Reſolutio & demonſtratio.

2. Quo-

2. Quoniam anguli ad C recti (§. 67), erit quadratum lateris BE æquale quadratis laterum EC & BC ſimul ſumtis (§. 272). Igitur ex quadrato lateris EB ſubtrahatur quadratum lateris BC; erit reſiduum quadratum lateris EC (§. 27 *arith.*). Ex hoc extrahatur radix quadrata (§. 78 *arith.*), erit ea EC.

3. Subtrahatur EC a radio *n*E, reſiduum erit C*n* (§. 27 *Arith.*).

4. Quoniam anguli ad C recti *per dem.* erunt quadrata laterum BC & C*n* ſimul ſumta æqualia quadrato B*n* (§. 272). Addantur ergo quadrata BC & C*n*, & ex ſumma extrahatur radix quadrata (§. 78 *Arith.*). Hæc erit chorda quæſita B*n* arcus dimidii. *Q. e. i. & d.*

Sit radius *n*E = 100000, AB = 104499, erit *n*B = 54288.

Corollar. 277. Aliqua hinc ratione intelligitur, quomodo ratio diametri ad peripheriam circuli inveſtigari potuerit. Nempe per continuam biſectionem quærebantur chordæ arcuum minorum minorumque, donec chorda arcus admodum exigui fuerit inventa. Hæc multiplicabatur per numerum laterum polygoni. Unde prodibat perimeter totius polygoni a peripheria circulari parum deficientis. Ut exactius obti-

ne-

neretur hæc peripheria, quærebatur etiam latus & perimeter (hoc eſt, ſumma laterum) ſimilis polygoni circumſcripti; adeo ut peripheria circuli eſſet media arithmetice proportionalis inter polygoni inſcripti & circumſcripti perimetros. His ergo in unam ſummam collectis & per 2 diviſis inveniebatur peripheria circuli (§. 97 *arith.*).

278. Archimedes in libello de circuli dimenſione ſtatuit diametrum ad peripheriam eſſe ut 7 ad 22. Operóſius rationem diametri ad peripheriam inveſtigávit Ludólphus Colonienſis, qui tandem reperit, ſi diameter ſumatur 100 000 000 000 000 000 000 peripheriam quam proxime eſſe 314 159 264 358 979 323 846. Ad prolixos calculos evitandos ſumitur diametrum eſſe ad peripheriam, ut 100 ad 314.

279. *In quolibet circulo eadem eſt ratio diametri ad peripheriam.* Theorema.

Quilibet enim circulus deſcribitur recta circa punctum fixum tamdiu mota, donec alterum ejus extremum redeat ad punctum unde diſceſſerat (§. 40). Quare cum rectæ omnes ſint inter ſe ſimiles (§. 25), idemque modus circulos omnes deſcribendi (§. 40); circuli omnes ex datis ſimilibus juxta easdem regulas deſcribuntur; ſunt ergo omnes inter ſe ſimiles (§. 152). Quare cum ſimilia diſcrimen intrinſecum nullum admit- Demonſtratio.

mittant excepta quantitate (§. 15), ratio autem quantitatum a quantitate differat (§. 147); circuli ratione diametri ad peripheriam differre nequeunt. Eſt ergo in omnibus circulis eadem ratio diametri ad peripheriam. *Q. e. d.*

Theorema. 280. *Area circuli eſt ad quadratum diametri quam proxime ut 785 ad 1000.*

Demonſtratio. Eſt enim area circuli æqualis triangulo, cujus baſis peripheriæ, altitudo eſt radio æqualis (§. 268). Quare ſi diameter $= 100$, peripheria $= 314$ (§. 278), erit area circuli $= 314 \cdot 25 = (314 \cdot 100) : 4 = 7850$ (§. 270), quadratum autem diametri 10000. Eſt ergo area circuli ad quadratum diametri ut 7850 ad 10000, ſeu utrinque dividendo per 10 (§. 103 *arith.*) ut 785 ad 1000. *Q. e. d.*

Theorem. 281. *Areæ circulorum ſunt inter ſe, ut quadrata diametrorum.*

Demonſt. Dicatur area circuli unius A, area alterius a, quadratum diametri circuli A dicatur D^2, quadratum alterius d^2. erit

$$\left.\begin{array}{l} A : D^2 = 785 : 1000 \\ \& \; a : d^2 = 785 : 1000 \end{array}\right\} (\S.\ 180).$$

Igitur $A : D^2 = a : d^2$ (§. 16 *arith.*).

Er. etiam $A : a = D^2 : d^2$ (§. 106 *arith.*). ſeu areæ circulorum ſunt inter ſe, ut quadrata diametrorum. Q. e. d.

282. Aliis

282. Aliis verbis idem theorema ita effertur: *Circuli ſunt in ratione duplicata diametrorum.*

283. *Data diametro circuli invenire peripheriam.* Problema.

Quæratur quartus numerus proportionalis (§. 110 *arith.*) ad 100, 314, & datam diametrum. Erit is peripheria quæſita (§. 278, 279). Reſolutio.

Sit diameter 5''. Fac:

$$100 : 314 = 5''$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)1570 \end{array}\Big]\, 15\overset{''}{7} \quad \text{Peripheria circuli.}$$

284. *Data circuli peripheria* (15''7) *invenire diametrum.* Problema.

Quæratur quartus proportionalis numerus ad 314, 100, & peripheriam datam (§. 110 *arith.*); erit is diameter quæſita (§. 278, 279). Reſolutio.

E. gr. $314 : 100 = 15\overset{'''}{7}$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \hline 314)15700''' \end{array}\Big]\, 5''0''' \quad \text{Diameter.}$$

285. *Data diametro vel peripheria invenire aream circuli.* Problema.

Reſolutio. 1. Ex data diametro quæritur peripheria (§. 283) vel ex data peripheria diameter (§. 284).

2. Peripheria multiplicatur per quartam diametri partem; Factum erit area quæſita (§. 270).

Commodum eſt haud raro, multiplicare peripheriam per diametrum integram, & factum dividere per 4.

E. gr. Sit diameter $5\overset{\prime\prime\prime}{0}$, erit peripheria $15\overset{\prime\prime\prime}{7}$, adeoque area circuli $1\,9\,\overset{\prime\prime}{6}\,\overset{\prime\prime\prime}{2}\,\overset{iv}{5}\,0$.

Reſolutio alia. 1. Quæratur quadratum diametri $\overset{\prime\prime\prime}{2}500$.

2. Fiat: ut 1000 : 785 = $25\overset{\prime\prime\prime}{0}0$ (§. 280).

$$
\begin{array}{r}
2500 \\
\hline
39\overset{\prime\prime\prime}{2}500 \\
1570 \\
\hline
\end{array}
$$

1000) 1962500 | $196\overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{iv}{5}0$
[Area circuli.

Problema. 286. *Data area circuli* ($19625\overset{iv}{0}$) *invenire diametrum.*

Reſolutio. 1. Quæratur primo quadratum diametri dicendo (§. 280):

785 : 1000 = 196250 :
1000

785) 196250000 (250000
3925 . . .

2. Ex quadrato diametri 250000 extrahatur radix quadrata (§. 78 *arith.*); reperitur 500 ſeu 5 0 0. Atque hæc eſt diameter quæſita.

287. Si data area circuli invenienda eſſet peripheria; quæritur primum diameter (§. 286), & porro ex diametro peripheria (§. 283). Corollar.

288. *Dato radio* (G L = 25) *& arcus* (HL) *gradibus* (50) *invenire aream ſectoris* HGL. Problema. Tab. I. Fig. 20.

Reſolutio.

1. Ad 100, 314, & radium datum (25) quæritur numerus quartus proportionalis (§. 110 *arith.*); erit hic ſemiperipheria circuli (§. 278 *Geom.* & §. 103 *arith.*).

2. Ad 180, datos gradus arcus (50), & inventam ſemiperipheriam rurſus quæritur quartus proportionalis (§. 110 *arith.*) erit hic arcus in pedibus, digitis &c.

3. Multiplica numerum proxime inventum per dimidium radii dati. Factum erit area ſectoris quæſita (§. 269).

E. gr. In noſtro exemplo ſit

I. $100 : 314 = 25''' :$
25)

4 $\quad 1 : 785^{iv}$. Semiperiph.

II. $180 : 50 = 785^{iv}$
$\quad 50$

$18)\,3925|0]\,218^{iv}$
$\quad 32\ |0|$ arcus 50°
$\quad 145|$
$\quad 1$

III. $218^{iv} =$ arc. 50°
$125^{iv} = \frac{1}{2}$ rad.

1090
436
218

$27250''\,'''\,^{iv}$ Area ſectoris HGL.

Theorem. Tab. IV. Fig. 70. 289. *Si duorum parallelogrammorum* AC & DF *altitudines* (AB & DC) *ſunt æquales; parallelogramma ſunt inter ſe ut baſes* (BB & CF). *Quodſi baſes fuerint æquales; parallelogramma ſunt inter ſe ut altitudines.*

Pa-

Parallelogrammorum areæ æquales ſunt rectangulo ſeu facto ex baſi in altitudinem (§. 245 & ſeqq.). Area ergo parallelogrammi AC = BC. AB, & area parallelogrammi DF = CF. DC. Igitur AC : DF = (BC. AB) : (CF. DC). Sed AB = DC *per hypoth.* & ſi duæ quantitates per idem vel æqualia multiplicantur, quantitates multiplicatæ eandem inter ſe rationem habent quam facta (§ 101 *arith.*). Ergo AC: DF = BC : CF ſeu parallelogramma ejusdem altitudinis eandem inter ſe rationem habent quam baſes eorum. Q. *e. primum.* Demonſtratio.

Eodem modo demonſtratur parallelogramma eſſe inter ſe ut eorum altitudines, ſiquidem baſes æquales habuerint. Q. *e. alterum.*

290. Cum triangulum quodvis ſit dimidium parallelogrammi eandem cum ipſo baſin & altitudinem habentis (§. 256); *triangula* quoque *ejusdem altitudinis ſunt inter ſe ut baſes; & triangula æqualium baſium ſunt inter ſe ut altitudines* (§. 103 *Arith.*). Corollar.

291. *Si triangula* ABD *&* abd, *aut parallelogramma* ABCD *&* abcd *fuerint ſimilia, altitudines* BE *&* be *ſegmenta* Theorem. Tab. VIII. Fig. 122.

L 2 *quo-*

quoque baſium AE & *ae* atque ED & *ed* *ſunt lateribus homologis proportionalia.*

Demonſtratio. Triangula ABD & *bd*, parallelogramma quoque ABCD & *abcd* ſunt ſimilia *per hypoth.* Ergo A = *a* (§. 151); & ob altitudines BE & *be* ad AD & *ad* perpendiculares anguli ad E & *e* recti (§. 67), adeoque æquales (§. 129). Igitur BA : BE = *ba* : *be* (§. 159), adeoque BA : *ba* = BE : *be* (§. 100 *arith.*). Quare cum ſit etiam BA : AD = *ba* : *ad* (§. 151), adeoque BA : *ba* = AD : *ad* (§. 106 *Arith.*) erit quoque BE : *be* = AD : *ad* (§. 89 *Arith.*) ideoque BE : AD = *be* : *ad* (§. 100 *arith.*). *Quod erat primum.*

Quoniam anguli A = *a*, E = *e per demonſtrata*, & ob △△ ABD & *abd* ſimilia *per hypoth.* angulus BDA = angulo *bda* (§. 151), erit △ BED ∽ △ *bed*, & △ ABE ∽ △ *abe* (§. 162), & BA : AE = *ba* : *ae* (§. 151); adeoque BA : *ba* = AE : *ae* (§. 106 *Arith.*). Erit inſuper BA : AD = *ba* : *ad* (§. 151), ideoque BA : *ba* = AD : *ad* (§. 106 *Arith.*), ergo & AE : *ae* = AD : *ad* (§. 98 *arith.*). Quare cum ſit porro BD : AD = *bd* : *ad* & BD : ED = *bd* : *ed* (§. 151), erit quoque BD : *bd* = AD : *ad* & BD : *bd* = ED : *ed* (§. 106 *arith.*) adeoque ED : *ed* = AD : *ad*

ad (§. 98 *arith.*). Sed eſt etiam AE : *ae* = AD : *ad per demonſtr.* Ergo erit quoque ED : *ed* = AE : *ae* (§ 98 *arith.*) adeoque ED : AE = *ed* : *ae* (§. 106 *arith.*) Q. *e. alterum.*

292. *Parallelogrammum ABDC ex dato puncto F in duo trapezia æqualia* (AEBF & EFDC) *dividere.* Problema. Tab. IV. Fig. 71.

1. Fac AE = FC. Reſolutio.

2. Duc rectam EF. Secabit hæc parallelogrammum in duas partes æquales.

In parallelogrammo latera oppoſita ſunt æqualia (§. 241), & parallela (§. 218); adeoque *o* = *x* & *m* = *n* (§. 182) & ob AD = BC *per dem.* & AE = FC *per conſtruct.* ED = BF (§. 25 *arith.*); adeoque △ EDH = △ BHF (§. 137). Sed eſt etiam △ ADB = △ BDC (§. 241). Ergo & trapezium CFHD = trapezio AEHB (§. 25 *arith.*). Igitur & trapezium EFCD = trapezio AEFB (§. 18 *arith.*). Q. *e. d.* Demonſtratio.

293. *Figuram planam rectis lineis terminatam in tot partes dividere, quot libuerit.* Problema. Tab. IV. Fig. 72.

1. Inveſtigetur area figuræ (§. 264), dividaturque in tot partes, quot petebantur, e. g. in tres. Reſolutio.

2. Area trianguli ABC ſubtrahatur a tertia parte figuræ; reſiduum dividatur per $\frac{1}{2}$ CA, erit quotus altitudo trianguli CAf addendi triangulo ABC, ut obtineatur tertia pars figuræ (§. 262).

3. Intervallo ergo hujus altitudinis ducatur parallela quædam (non expreſſa in fig. 72), rectæ CA, quæ ſecabit rectam CD in f. Unde duci poteſt recta fA tertiam figuræ partem determinatura (§. 180, 181).

4. Pars ſexta totius figuræ, ſeu dimidium partis tertiæ, dividatur per $\frac{1}{2}$ fA, ceu dimidiam baſin; quotus erit altitudo trianguli Afg, quod ſit ſextæ parti figuræ æquale (§. 262).

5. Intervallo altitudinis modo inventæ ducatur rectæ fA parallela (non expreſſa in *fig.* 72), & obtinebitur punctum g, ut duci poſſit fg (pariter non expreſſa in fig. 72).

6. Sexta pars totius figuræ dividatur nunc per $\frac{1}{2}$ fg; quotus erit altitudo trianguli fgh, ſextam quoque partem figuræ æquaturi (§. 262).

7. Intervallo altitudinis poſtremum inventæ ducatur parallela rectæ fg, ut obtineatur punctum h; & duci poſſit recta hg, alteram & tertiam partem quæſitam determinatura.

8. Fa-

8. Facile intelligitur ſimili, quo *num*, 4, 5, 6, 7, modo ulterius eſſe progrediendum, ſi figura in plures quam tres partes eſt dividenda. Præterea ſi figura in 4 partes eſt dividenda, figuræ pars octava vel dimidium quartæ eſſet dividendum per dimidiam baſin &c. &c.

294. Sit CA $= 130'''$, CE $= 212'''$, *Bo* $= 53'''$, A*m* $= 106'''$, D*n* $= 57'''$ fiet

$\frac{1}{2}$ CA $= 65'''$
B*o* $= 53'''$
$\triangle$ABC $= 3445'''$

A*m* $= 106'''$
D*n* $= 57$
A*m* + D*n* $= 163$
$\frac{1}{2}$ CE $= 106$
978
163
Trapezium CADE $= 17278$
$\triangle$ ABC $= 3445$
Figura ABCDE $= 20723'''$
$\frac{1}{3}$ ABCDE $= 6907\frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$ ABCDE $= 3453\frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$ ABCDE $= 6907\frac{2}{3}'''$
$\triangle$ ABC $= 3445$

$\triangle$ CAf $= 3462\frac{2}{3}'''$

$\frac{1}{2}$ CA $= 65'''$) 212 } $53\frac{18}{65}'''$. *Altitudo*
17 } $\triangle$ CAf

$\frac{1}{4}$ ABCDE $= 3453\frac{5}{6}$ }
$\frac{1}{2}$ fA $= 65'''$ 204 } $53\frac{9}{65}$. *Altitudo*
9 } $\triangle$ Afg.

$\frac{1}{4}$ ABCDE $= 3453\frac{5}{6}$ }
$\frac{1}{2}$ fg $65'''$) 204 } $53\frac{9}{65}$ *Altitudo*
9 } $\triangle$ fgb

295. Si diviſio in charta fuerit abſoluta, puncta f, b; g in campo reperiuntur ope magnitudinis linearum C f, fb, & A g.

Theorema. Tab. IV. Fig. 75. 296. *Si baſi* BC *trianguli* ABC *ducatur parallela* ed; erit 1. AB : Ae = AC : Ad. 2. AB : Ae = BC : ed. 3. Ae : eB = Ad : dC. 4. Triangulum Aed eſt ſimile triangulo ABC.

Demonſtratio. Quoniam ed baſi BC parallela *per hyp.* erit externus e = B, d = C (§. 182), adeoque AB : Ae = AC : Ad, & AB : Ae = BC : ed, & $\triangle$ Aed ∽ $\triangle$ ABC (§. 159). *Quod erat primum, ſecundum, & quartum.*

Triangula edB & edC habent eandem baſin ed & ſunt inter easdem parallelas ed & BC *per hyp.* ſunt ergo inter

tur ſe æqualia (§. 254). Quare cum idem triangulum *Aed* ad æqualia eandem rationem habeat (§. 99 *arith.*) erit *Aed* : *edB* = *Aed* : *edC*. Porro triangula *Ade* & *edB* habent eundem verticem *d* & baſin ſuper eadem recta AB, adeoque ejusdem ſunt altitudinis. Ergo △ *Aed* : *edB* = *Ae* : *eB* (§. 290). Triangula quoque *Aed* & *deC* habent eundem verticem *e*, & baſes ſuper eadem recta AC, adeoque & ipſa ejusdem ſunt altitudinis. Ergo △ *Aed* : *edC* = *Ad* : *dC* (§. 290). Quare cum ſit *Aed* : *edB* = *Aed* : *edC per demonſtrata*, & rationes rationibus ſimilibus ſimiles ſint inter ſe ſimiles, erit *Ae* : *eB* = *Ad* : *dC* (§. 98 *arith.*). *Q. e. tertium.*

297. Quoniam AB : *Ae* = AC : *Ad*, & AB : *Ae* = BC : *ed*, atque *Ae* : *eB* = *Ad* : *dC* (§. 296), erit etiam AB : AC = *Ae* : *Ad*, & AB : BC = *Ae* : *ed*, atque *Ae* : *Ad* = *eB* : *dC* (§. 106 *arith.*). Corollar. Tab. IV. Fig. 75.

298. *Ad datas rectas* AB *&* CD *tertiam proportionalem invenire.* Problema. Tab. IV. Fig. 76.

1. Jungantur rectæ arbitrariæ longitudinis ad angulum arbitrarium A. Reſolutio.

2. Fiat

2. Fiat AB datæ rectæ AB æqualis, & AD = datæ CD; ducaturque DB.

3. Fiat porro BC = datæ CD, ducaturque per C punctum extremum rectæ BC linea rectæ BD parallela (§. 180. 181). Erit DE tertia proportionalis quæſita (§. 297).

Problema. Tab. IV. Fig. 76. Reſolutio. 299. *Tribus datis rectis* AB, AD, BC, *quartam proportionalem invenire.*

1. Fiat, ut ante (§. 298), angulus arbitrarius; fiantque porro AB, AD, BC datis rectis æquales.

2. Ducatur DB, & eidem per C parallela CE (§. 180, 181); erit DE quarta proportionalis quæſita (§. 297).

Problema. Tab. IV. Fig. 77. Reſolutio. 300. *Datam rectam* DE *in tot partes æquales dividere, quot libuerit.*

1. Transferantur in rectam quandam BC tot partes æquales, circino ad arbitrium aperto, in quot partes linea propoſita eſt dividenda e. g. 7.

2. Super BC conſtruatur triangulum æquilaterum BAC; ducanturque rectæ 1A, 2A, 3A &c.

3. Ex A in D, & ex A in E transferatur recta data DE. Erit Do pars ſeptima rectæ DE.

Quo-

Quoniam AD = AE, & AB = AC *per conſtr.* AD : AE = AB : AC (§. 99 *arith.*); & quia inſuper angulus A utrique triangulo BAC & DAE communis; erit angulus ADE = ABC (§. 158), adeoque DE parallela ipſi BC (§. 183). Ergo AD : DE = AB : BC (§. 297). Sed eſt AB = BC *per conſtr.* ergo & AD = DE. Porro AD : Do = AB : B 1 (§. 297); & AB = BC *per conſtr.* AD = DE *per dem.* Ergo DE : Do = BC : B 1. (§. 99 *arith.*). Sed B 1 = $\frac{1}{7}$ BC *per hyp.* Ergo & Do = $\frac{1}{7}$ DE. *Q. e. d.* Demonſtratio.

301. Simili modo *dividitur recta data ſecundum eandem rationem, ſecundum quam diviſa eſt data alia* BC, etſi partes rectæ diviſæ inter ſe non ſint æquales. Corollar.

302. Multi uſus eſt hoc corollarium in Architectonica militari & civili, in Geographia &c. ſi figuræ datæ ſimilis alia ſive major ſive minor eſt deſcribenda.

303. *Parallelogrammum ABCD vel triangulum ABC in quotcunque partes æquales dividere.* Problema. Tab. IV. Fig 77.78.

1. Dividatur baſis parallelogrammi vel trianguli in partes petitas (§. 300). Reſolutio.

2. Per ſingula diviſionum puncta ducantur in parallelogrammo parallelæ-

læ lateri alterutri AB vel DC (§. 180, 181); in triangulo ducantur rectæ 1 A, 2 A &c.

Erit ibi parallelogrammum, hic triangulum diviſum in partes æquales quæſitas (§. 289, 290).

Problema. Tab. V. Fig. 81. Reſolutio. 304. *Scalam geometricam conſtruere.*

1. In rectam AE ab A in B transferantur 10 partes æquales arbitrariæ magnitudinis.

2. Intervallum AB ex B verſus E transferatur toties, quoties libuerit.

3. Erigantur in A & E perpendiculares ad AE (§. 165), & in ſingulas transferantur 10 partes æquales arbitrariæ longitudinis, ſed ejusdem in utraque perpendiculari.

4. Per ſingulas perpendicularium AD & EF diviſiones ducantur rectæ, quarum poſtrema eſt DF.

5. In DF ex D in C transferantur partes 10 partibus ex A in B translatis æquales.

6. Demum ducantur a punctis diviſionum rectæ AB in puncta ſequentis diviſionis rectæ DC transverſæ lineæ A, 9, &c. 1 C.

Si partes rectæ AB vel DC habentur pro pedibus, erit AB decempeda, partes autem ſingulæ a recta BC

&

& tranſverſa 1 C interceptæ tot erunt digiti, quot numerus iis adſcriptus habet unitates.

Cum partes perpendicularium AD & BC inter lineas (parallelas) DC & 1. 9. inter 9. 1. & 8. 2. &c. interceptæ ſint æquales *per conſtr.* erunt lineæ hæ omnes parallelæ (§. 178), adeoque in triangulo 1* CB ut CB : B 1* = C 1 : ad particulam minimam inter CB & C1* interjectam (§. 297); adeoque ut CB : C 1* = B 1* : ad particulam inter BC & C 1* interjectam (§. 106 *arith.*). Sed C 1 = $\frac{1}{10}$ CB *per conſtr.* ergo & particula inter BC & C 1* interjecta eſt $\frac{1}{10}$ B 1*. Sed ſi B 1* habetur pro pede, $\frac{1}{10}$ B 1* eſt digitus (§. 27). &c. *Q. e. d.* Demonſtratio.

Si B1* habetur pro digito erit particula inter BC & C 1 interjecta lineola (§. 27).

305. Si circini pedem unum colloces in punctum diviſionis, cui in recta BC adſcribitur 7, & pedem circini alterum promoves usque ad lineam, cui inferius in recta DC adſcribitur 5, intervallum circini dat lineam, quæ ſupra 5 pedes habet 7 digitos. Et ſic de ceteris. Corollar.

306. *Inter rectas duas B A & B D mediam proportionalem invenire.* Problema. Tab. IV. Fig. 79.

1. Re-

Reſolutio. 1. Rectæ datæ conjungantur in unam AD.

2. Recta AD dividatur bifariam in C (§. 169); & ex C centro deſcribatur ſemicirculus AED.

3. Ex puncto B, in quo rectæ datæ junguntur, erigatur perpendicularis BE (§. 165). Erit hæc media proportionalis quæſita.

Demonſtratio. EB eſt perpendicularis ad AD *per hyp.* ergo anguli ad B ſunt recti (§. 67), adeoque triangula ABE & EBD ſunt rectangula (§. 73). Eſt autem angulus AED in Semicirculo *per conſtr.* adeoque & ipſe rectus (§. 201), unde & triangulum AED eſt rectangulum (§. 73). Duo ergo triangula AED & AEB ſunt rectangula, & habent præterea angulum *n* communem; igitur & ſimilia ſunt, & $x = m$ (§. 162, 151). Unde triangula quoque rectangula AEB & EBD habent præterea angulum unum unius *x* æqualem uni alterius *m*; ſunt ergo & ipſa ſimilia, & $o = n$, & latera homologa ſunt proportionalia (§. 162, 151). Igitur BD : EB = EB : AB. Eſt ergo EB media proportionalis inter BD & BA (§. 94 *arith.*). *Q. e. i. & d.*

307. Si

307. Si BD = 1, BA = numero cuicunque dato, ſeu ſi numerus quicunque ex BD tanquam unitate per lineam BA exprimitur (§. 2. arith.) erit BE radix quadrata hujus numeri (§. 105. arith.). Quantitas rectæ BA, ſi ſcalæ geometricæ eſt accommodata, ſeu ope ſcalæ determinata, etiam quantitas rectæ BE per ſcalam inveniri, adeoque hujus ſcalæ beneficio radix quadrata ex numero dato extrahi poteſt. Coroll. 1.

308. Quoniam triangula quoque rectangula AED & DBE habent angulum m communem, erunt & ipſa ſimilia (§. 162), adeoque etiam AD : DE = DE : BD. Coroll. 2.

309. *Data chorda* AB *arcus cognominis, hujusque altitudine* DE, *invenire diametrum* EF, *&* *centrum circuli* C. Problema. Tab. V. Fig. 80.

1. Quæratur tertia proportionalis ad datam altitudinem arcus ED, ad dimidium chordæ datæ DB (§. 109. arith.); erit hæc DF (§. 306). Reſolutio.

2. Inventæ DF addatur altitudo arcus DE; erit ſumma diameter EF.

3. Diametro biſecta reperitur radius, adeoque centrum circuli C.

Sit ED = 52'', DB = 156'', fiet

```
52 : 156 = 156
           156
          ----
           936
          780
         156
        ------
52) 24336 [468 = DF
     353  [ 52 = ED
     416  ---------
          520 = EF
        2)--------
          260 = EC.
```

310. Uſui eſt hoc problema, dum in Architectonica arcus ſupra januas & feneſtras conſtruendi ſunt.

Problema. Tab. V. Fig. 80. 311. *Data chorda arcus* AB, *& hujus altitudine* ED *invenire ſegmentum circuli* ADBEA.

Reſolutio. 1. Ex data chorda & altitudine arcus quæratur diameter circuli EF (§. 309).

2. Hujus ope deſcribatur circulus AFBE, & in eum transferatur chorda AB; ducanturque radii CA, CB.

3. Inſtrumento transportatorio explora quantitatem anguli ACB, ſeu arcus AEB.

4. Quære ſectorem ACBE (§. 288).

5. Altitudine ED a radio EC ſubtracta, quære per reliquam DC & cho-

chordam datam AB triangulum ABC (§. 261).

6. Subtrahe triangulum ABC a ſecto-re ACBE, reſiduum erit ſegmentum quæſitum.

312. *Invenire latus quadrati parallelo-grammo vel triangulo dato æqualis.* Problema.

Quæratur media proportionalis inter baſin & altitudinem parallelogrammi, aut inter dimidiam baſin & integram altitudinem trianguli, ſive in lineis (§. 306), ſive in numeris (§. 107. *arith.*), erit ea latus quadrati quæſiti. Reſolutio

Cum enim factum ſub extremis ſit æquale facto ſub mediis (§. 98. *arith.*), quadratum lineæ vel numeri inventi æquale erit facto ex baſi parallelogrammi in altitudinem, vel ex dimidia baſi in altitudinem trianguli (§. 67, 94. *arith.* & §. 245 *Geom.*), adeoque areæ parallelogrammi vel trianguli (§. 245. &c. 261). Demonſtratio.

313. *Metiri diſtantiam duorum locorum A & B, quorum ad utrumque acceſſus patet.* Problema. Tab. V. Fig. 82.

1. Electa ſtatione D, colloca ibi menſulam, & in hac determinetur punctum C. Reſolutio.

2. Per regulam dioptris inſtructam collima in A, & duc rectam C*a*.

3. Similiter collima in B, & duc rectam C *b*.

4. Metire lineas CA, & CB (§. 33).

5. Ope ſcalæ geometricæ easdem transfer ex C in *a*, & ex C in *b* (§. 305).

6. Metire in eadem ſcala rectam *ab*, indicabit, hæc quantitatem diſtantiæ AB locorum A & B.

Demonſtratio. Quoniam angulus C utrique triangulo CAB & *Cab* communis, & *Ca*: CA = *Cb* : CB *per conſtr.*: erit etiam *Ca*: CA = *ab* : AB (§. 158). Sed *Ca* tot habet decempedas, pedes, digitos &c. in menſura modica ſeu ſcala geometrica, quot CA in menſura vera & majore *per conſtruct.* Ergo etiam *ab* continebit tantum in menſura modica, quantum diſtantia AB in majore. *Q. e. d.*

314. Obtinebitur eadem diſtantia AB, ſi

1. Inſtrumentis metiaris angulum C, & lineas CA & CB (§. 60, 33).

2. Ope inſtrumenti transportatorii & ſcalæ geometricæ conſtruas triangulum *a*C*b* (§. 113. 305).

3. Explores ad eandem ſcalam quantitatem rectæ *ab* (§. 305).

Problema. Tab. V. Fig. 83. 315. *Metiri diſtantiam duorum locorum A & B, quorum unus B eſt inacceſſus.*

Reſolutio. 1. Electa ſtatione C in menſula per dioptras collima in A & B, atque duc re-

rectas C a, & alteram, quæ angulum C intercipiat.

2. Metire diſtantiam CA (§. 33) eamque ope ſcalæ geometricæ transfer in menſula ex C in a.

3. Menſulam ita transfer in A, ut punctum a recta immineat puncto A, & regulam dioptras ferentem applica rectæ ac, menſulam vero tamdiu verte, donec per dioptras proſpicienti occurrat C, ſeu baculus in C defixus. Tum menſula immota per regulam dioptris inſtructam collima verſus B.

4. Duc rectam ab, quæ rectam prius in C verſus B ductam ſecabit in b.

5. Metire rectam ab in ſcala geometrica (§. 305.), & innoteſcet diſtantia locorum A & B.

Eſt enim in triangulis ABC & abc A = a, C = c *per conſtr.* Ergo $ac : ab$ = AC : AB (§. 159.), adeoque & ac : AC = ab : AB (§. 106 *arith.*). Sed quod eſt ac in menſura modica, hoc AC in majore *per conſtr.* Ergo & AB erit in menſura majore, quod ac in modica. Q. e. d. Demonſtratio.

316. Idem obtineri, ſi 1. inſtrumentis metiare angulos C & A, atque lineam CA (§. 60, 33); 2. Ope transportatorii & ſcalæ conſtruas triangulum abc, ſatis intelligitur ex dictis (§. 314).

 317. *Me-*

Problema. Tab. V. Fig. 84. 317. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A & B, *ad quorum neutrum acceſſus datur.*

Reſolutio. 1. Duæ eligantur ſtationes C & D, fixoque in D baculo vel alio ſigno.

2. Poſita menſula in C collima per dioptras regulæ in A, B, & D, atque duc lineas *c a*, *c b*, *c d*.

3. Metire diſtantiam inter duas ſtationes C & D, eamque ope ſcalæ geometricæ transfer ex *c* in *d*.

4. Fixo in C baculo, & menſula ex C in D ita translata, ut punctum *d* recta immineat puncto D.

5. Ex *d* per dioptras collima in C, A, & B; atque duc rectas *d a*, *d b*, quæ prius ductas interſecabunt in punctis *a* & *b*. Obſervatis iis, quæ ſupra monuimus (§ 315 *n*. 3).

6. Metire ope ſcalæ geometricæ rectam *a b*; & innoteſcet diſtantia AB locorum A & B.

Demonſtratio. Cum intricatior videatur tironibus demonſtratio, demus eam in ſuos ſyllogiſmos reſolutam.

I. In triangulis *c d b* & CDB anguli *b c d* = BCD & *b d c* = BDC *per conſtruct.*

Si in duobus triangulis duo anguli unius ſunt ſingulatim æquales duobus alterius; latera homologa horum triangulorum ſunt proportionalia (§. 159).

Er-

Ergo $cd : CD = cb : CB$.

II. Similiter in triangulis acd & ACD anguli $acd = ACD$, & $cda = CDA$ *per conſtr.*

Si in duobus triangulis duo anguli unius &c. (§. 159.) ut ante.

Ergo $cd : CD = ca : CA$

III. $\begin{cases} \textit{Concl. } 1.\ cd : CD = cb : CB. \\ \textit{Concl. } 2.\ cd : CD = ca : CA. \end{cases}$

Si duæ rationes fuerint ſimiles eidem tertiæ, ſunt etiam ſimiles inter ſe (§. 92. *arith.*).

Ergo $cb : CB = ca : CA$.

IV. In triangulis acb & ACB angulus $acb = ACB$ angulo *per Conſtr.* & $cb : CB = ca : CA$ per demonſtrata *num.* 3.

Si in duobus triangulis angulus unus unius fuerit æqualis uni alterius, & latera æquales angulos comprehendentia fuerint proportionalia, etiam reliqua latera proportionalia ſunt (§. 158).

Ergo $ca : CA = ab : AB$

V. $\begin{cases} \textit{Concl. } 4.\ ca : CA = ab : AB \\ \textit{Concl. } 2.\ cd : CD = ca : CA \end{cases}$

Rationes ſimiles eidem tertiæ ſunt ſimiles inter ſe (§. 92 *arith.*).

Ergo $ab : AB = cd : CD$.

Sed cd tot habet perticas, pedes, digitos &c. in menſura modica, quot CD in majore *per conſtruct.*

Ergo etiam *ab* tot habebit perticas, pedes, digitos &c. in menſura modica ſeu ſcala geometrica, quot diſtantia AB in menſura majore. *Q. e. d.*

318. Eadem methodo multorum locorum diſtantias eadem opera invenire licet, ſi per dioptras ex duabus ſtationibus in unumquemque collimas.

319. Problema hoc ſolvi quoque poſſe, ſi

1. inveſtigas ope perticæ communis diſtantias ſtationum C & D.

2. Aſtrolabio vel quadrante exploras angulos ACB, BCD, CDA, ADB.

3. Ope hactenus inventorum beneficio transportatorii & ſcalæ geometricæ conſtruas triangula ſimilia, ſatis intelligitur ex dictis (§ 314, 316), præſertim cum problemata hæc non ideo afferantur, quaſi accurata praxis non alia inſuper requirat artificia, induſtrias alias: ſed ut tirones in facili exemplo aliquem proſpiciant uſum theorematum geometriæ, quæ ipſis alias ſterilia prorſus & inutilia videntur.

Problema
Tab. V.
Fig. 85.

320. *Metiri altitudinem turris* AB, *ad quam acceſſus datur.*

Reſolutio.

1. Menſulam colloca in C, ejusque latus EF, vel alterum huic parallelum HG ad ſitum horizontalem compone ope perpendiculi (Bleywaag).

2. Duc lineam *bc* lateri menſulæ parallelam,

3. Applica ad *bc* regulam dioptris inſtructam, & per has proſpiciens determina

mina punctum turris D. Tum verſa regula per dioptras collima in apicem turris A, quo deprehenſo duc rectam *c a*.

4. Metire diſtantiam ſtationis C, a turris AB medio, eamque transfer ope ſcalæ geometricæ in rectam *c b*.

5. Duc rectam *b a* perpendicularem ad *b c* in puncto *b*; & quantitatem rectæ *b a* explora in ſcala geometrica.

6. Adde altitudinem menſulæ ſeu lineæ *c b* ſupra ſolum; & innoteſcet altitudo turris AB.

Cum enim *ab* ſit perpendicularis ad *c b per conſtr.* & turris AB perpendicularis ad horizontem, adeoque etiam ad *cb* ſeu *c*D parallelam horizontali *per conſtr.* (§. 179); erunt anguli *b* & D recti (§. 67), adeoque externus *b* æqualis interno D (§. 129), unde *a b* parallela rectæ AD (§. 183). Igitur *c b* : cD = *b a* : DA (§. 296). Quare cum *c b* tot habeat perticas, pedes &c. in menſura modica, quot *c* D in majore *per conſtr.* etiam *b a* tot habebit in ſcala geometrica, quot altitudo DA in majore. *Q. e. d.* Demonſtratio.

321. Eadem altitudo AB invenietur, ſi aſtrolabio metiaris angulum ACB, & pertica diſtantiam CB. Atque ex his datis conſtruas triangulum rectangulum ſimile triangulo ABC, Tab. V. Fig. 86.

 ut

ut ex ſæpius annotatis patet. Reliquam turris partem BD reperies metiendo etiam aſtrolabio angulum BCD, & ex hoc atque diſtantia CB datis conſtruendo triangulum rectangulum ſimile triangulo CBD.

Problema Tab. V. Fig. 87.

322. *Metiri altitudinem inacceſſam* AB.

1. Duas elige ſtationes, unam in C, alteram in D.

2. Menſula verticaliter & in ſitu horizonti parallelo ope perpendiculi conſtituta in C, ut prius.

3. Duc rectam *c d* lateri menſulæ parallelam.

4. Per dioptras regulæ collima ex *c* in A & duc rectam *c a*.

5. Metire diſtantiam ſtationum CD, & eam ope ſcalæ geometricæ transfer ex *c* in *d*.

6. Menſula in D translata, & ibi quoque ad ſitum horizonti parallelum compoſita, atque ita, ut punctum *d* recta immineat puncto D, ex *d* per dioptras collima in A, & duc rectam *d a*.

7. Ex *a* demitte perpendicularem *af* in productam *c d*.

8. Explora quantitatem perpendicularis *af* in ſcala geometrica; & innoteſcet pars altitudinis AF.

Demonſtratio. Anguli ADC & ADF, itemque anguli *a d c* & *a d f* ſunt anguli, qui fiunt a recta inſiſtente alteri rectæ *per conſtr.*

adeo

adeoque ADC + ADF = 180°, & $adc + adf = 180°$ (§. 130). ergo ADC + ADF = $adc + adf$ (§. 16 *arith.*). Sed eſt adf = ADF *per conſtruct.* ergo adc = ADC (§. 25 *arith.*). Eſt autem & acd = ACD *per conſtruct.* Ergo cd : CD = da : DA (§. 159). Porro angulus adf = ADF *per conſtr.* anguli f & F fiunt a perpendicularibus *per hyp.* adeoque ſunt recti (§. 67); unde & æquales (§. 129). Igitur etiam ad : AD = af : AF (§. 159). Sed eſt quoque cd : CD = da : DA *per demonſtrata.* Ergo cd : CD = af : AF (§. 98 *arith.*). Atqui cd tot complectitur perticas, pedes &c. in menſura modica, quot CD in majore. Ergo etiam af tot complectetur perticas, pedes &c. in menſura modica, quot pars altitudinis AF in majore. Q. e. d.

323. Pars reliqua altitudinis FB ſimili ratione invenitur ex duabus ſtationibus C & D conſtruendo angulos æquales angulis FCB & FDB. &c. &c. Corollar.

324. Facile intelliget antecedentium gnarus eandem altitudinem AF inveniri metiendo aſtrolabii vel quadrantis ope angulos ACF & ADF, & quæſita ulterius diſtantia duarum ſtationum CD conſtruendo triangula ſimilia triangulis CAD & CAF.

325. *Area*

Problema. Tab. VI. Fig. 88. 325. *Area campeſtris ABCDEA rectilineæ ac libere permeabilis ichnographiam perficere*, hoc eſt, figuram areæ ſimilem deſcribere.

Reſolutio. 1. Metire pertica in areæ perimetro lineas AB, BC, CD, DE, EA, & diagonales BD ac BE.

2. Ope ſcalæ geometricæ conſtrue figuram *abcdea* (§. 242); erit hæc datæ ſimilis.

Demonſtratio. Singula latera triangulorum figuræ *abcdea* eandem inter ſe rationem habent, quam ſingula latera triangulorum areæ ABCDEA *per conſtruct.* Ergo ſinguli quoque anguli triangulorum figuræ *abcdea* æquales ſunt ſingulis angulis areæ ABCDEA, & tota triangula utrobique ſimilia (§. 157). Præterea triangula figuræ minoris eodem ordine conjunguntur & ſeſe ſubſequuntur, quo triangula figuræ majoris ſeu areæ campeſtris *per conſtruct.* Nihil eſt ergo quo figura *abcdea* diſcerni poſſit a figura ABCDEA. Ergo figura *abcdea* ſimilis eſt areæ campeſtri ABCDEA (§. 152). Q. e. d.

Reſolutio alia. Tab. VI. Fig. 89. 326. 1. Ex puncto A intra ipſam aream campeſtrem electo per dioptras regulæ in menſula poſitæ collima in baculos in omnibus areæ angulis B, C, D, E, F, defixos, & duc rectas A *b*,

A*c*, A*d* &c. hactenus indeterminatæ longitudinis.

2. Metire in area lineas AB, AC, AD, AE, AF.

3. Ope ſcalæ geometricæ ejusdem longitudinis in menſura modica fac rectas A*b*, A*c*, &c. ut nunc determinentur puncta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

4. Denique duc rectas *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fb*; & erit conſtructa figura areæ datæ ſimilis.

Cum enim anguli omnes ad A ſint communes triangulis minoribus A*fb*, A*bc* &c. & majoribus AFB, ABC &c. &c. & latera angulos communes comprehendentia in minoribus triangulis ſint proportionalia lateribus homologis triangulorum majorum *per conſtruct.* reliqua quoque latera erunt proportionalia & anguli reliqui omnes utrobique æquales; atque triangula minora omnia majoribus ſimilia (§. 158). Quare cum ſint præterea in minore majoreque figura eodem ordine poſita, figura minor ſola quantitate differt a majore; adeoque eidem eſt ſimilis (§. 15). Q. e. d. Demonſtratio.

327. Figuram *abcdef* ſimilem areæ ABCDEF conſtruere quoque poteris; Corollar. Tab. VI. Fig. 89.

Si 1. Pertica metiris rectas omnes AB, AC, AD, AE, AF.

2. A-

2. Aſtrolabio angulos BAC, CAD, DAE &c. Hinc

3. Ope tranſportatorii & ſcalæ geometricæ conſtruere dabitur figuram *abcdef*.

Problema. Tab. VI. Fig. 90. 328. *Ichnographiam perficere areæ, quam ex duabus ſtationibus* A *&* B *integram obtutu comprehendere licet.*

Reſolutio. 1. Poſita menſula in A, fixisque baculis in B, C, D, E, per regulam dioptris inſtructam collima in baculos ſingulos, & duc rectas AB, AC, AD, AE.

2. Metire diſtantiam ſtationum AB, eamque ope ſcalæ geometricæ transfer ex A in *b*.

3. Menſula in B ita translata, ut punctum *b* correſpondeat puncto B, & baculo in A defixo, regulam dioptris inſtructam applica rectæ A*b*, menſulamque tamdiu verſa, donec per dioptras baculum A conſpicias.

4. Tum porro per dioptras collima in E, D, C, & duc rectas, quæ prius ductas *num.* 1. interſecabunt in punctis cognominibus *e*, *d*, *c*.

5. Tandem ex punctis A, *b*, *c*, *d*, *e* duc rectas A*e*, *ed*, *cd*, *cb*, & ichnographia erit perfecta.

Figu-

Figuram minorem majori ſimilem facile animo concipiet, qui minores majoribus confert in figuris 88 & 89.

329. Idem problema ſolvetur, ſi Reſolutio alia.

1. Pertica metiris lineam AB, inſtrumento autem geometrico ex A angulos EAD, DAC, CAB; ex B angulos ABE, EBD, DBC.

2. Ope ſcalæ geometricæ in charta ducas rectam Ab, & ope transportatorii ad A conſtituas angulos æquales angulis EAD, DAC, CAB; & ad *b* angulos ABE, EBD, DBC.

3. Demum per puncta interſectionum convenientia ducas rectas cognomines rectis AE, ED, DC, BC.

330. *Ichnographiam perficere areæ, cujus periphæriam ſeu ambitum integrum peragrare licet*, e. g. ædificii, turris, ſylvæ. Problema Tab. VI. Fig. 90.

1. Menſula in A collocata per dioptras regulæ collima in E & B, ubi baculi ſint defixi, & duc rectas verſus E & B, ut obtineas angulum A.

2. Metire lineam AB, eamque ope ſcalæ geometricæ transfer ex A in *b*.

3. Menſulam ex A ita transfer in *b* ut *b* immineat puncto B; & regula rectæ *b* A applicata collima in A, & poſtea in C, & duc rectam ex *b* verſus C, ut obtineas angulum B.

4. Me-

4. Metire rectam BC, & ope ſcalæ geometricæ eam transfer in menſulam. Quodſi hac ratione integram aream peragraveris, obtinebis figuram areæ ſimilem.

Demonſtratio. Sunt enim figuræ anguli omnes angulis areæ æquales; & latera figuræ omnia lateribus areæ omnibus proportionalia *per conſtr.* Quare cum in area præter magnitudinem nil poſſit diſcerni huc pertinens niſi angulorum & laterum proportio; figura & area in omnibus conveniunt, quæ in iis diſcerni poſſunt. Erit ergo figura areæ ſimilis (§. 15).

Reſolutio alia. 331. Si latera areæ ſingula metiaris, & angulos tot, quot ſunt latera demtis tribus, licebit pariter areæ ichnographiam perficere ope ſcalæ geometricæ & inſtrumenti transportatorii.

Cum in ſequentibus agatur de corporibus geometricis, ſeu ſolidis, tirones utiliter hic relegent dicta ſuperius (§§. 4, 5, 6, 7).

Definitio. Tab. VI. Fig. 91. 332. Si Semicirculus DSM circa diametrum DM gyratur, ſeu in orbem movetur, deſcribitur *Sphæra*, ſeu *Globus*. Diameter DM dicitur etiam *Diameter* vel *Axis Sphæræ*.

Corollar. 333. Omnia ergo puncta ſuperficiei ſphæræ a centro ſphæræ C æqualiter diſtant (§. 48).

334. Si

334. Si rectangulum ACDB, vel etiam Quadratum quodcunque, circa ſuam altitudinem CD in orbem movetur, deſcribitur *Cylindrus*. Idem fit, ſi circulus ABD juxta ductum rectæ AE motu ſibi ſemper parallelo deorſum movetur. Definitio. Tab. VI. Fig. 92. 93.

335. Si figura rectilinea e. gr. triangulum ACB juxta ductum rectæ AD motu ſibi ſemper parallelo deorſum movetur, deſcribitur *Priſma*. Definitio. Tab. VI. Fig. 94.

336. Priſma igitur quodlibet baſes duas ACB & DEF habet æquales. Idem valet de cylindris. Priſma quoque tot includitur figuris quadrilateris ACDE, CBFE, ABDF; quot figura genitrix ACB habet latera. Corollar.

337. In priſmate & cylindro ſectiones quælibet baſibus parallelæ ſunt inter ſe æquales. Corollar.

338. Si rectangulum ABCD juxta ductum rectæ DE ad duo rectanguli latera DA & DC perpendicularis motu ſibi ſemper parallelo deorſum movetur, deſcribitur *Parallelepipedum*. Definitio. Tab. VI. Fig. 95.

339. Parallelepipedum duas habet baſes æquales, & univerſim ſex includitur rectangulis, quorum bina quæque oppoſita ſunt æqualia. Corollar.

340. Si quadratum ABCD juxta ductum rectæ DE, quæ ſit uni lateri qua- Definitio. Tab. VI. Fig. 96.

drati æqualis, & perpendicularis ad duo quadrati latera DC & DA, motu ſibi ſemper parallelo deorſum movetur, gignitur *Cubus.*

Corollar. 341. Cubus ergo ſex quadratis æqualibus comprehenditur.

Definitio. Tab. VI. Fig 98. 342. Si triangulum rectangulum ABC circa cathetum AB in orbem movetur, deſcribitur *Conus.* Idem fiet, ſi recta quædam AC in peripheria circuli C ita incedat, ut conſtanter inhæreat puncto fixo A; quod *vertex* Coni appellatur; recta AB ex vertice coni A in centrum baſis B ducta dicitur *Axis coni.* Recta autem ex vertice in peripheriam baſis ducta AC appellatur *Latus coni.*

Corolar. 343. Sectiones coni ACB quæ baſi ſunt parallelæ, ſunt circuli, ſed eo minores, quo vertici propiores.

Defintio. Tab.VI. Fig. 97. 344. Si recta quædam ut CA ita incedit per latera omnia figuræ rectilineæ, e. g. trianguli ABD, ut conſtanter inhæreat puncto fixo C, deſcribitur *Pyramis.* Punctum C *vertex* pyramidis appellatur.

Corollar. 345. Baſis pyramidis eſt figura rectilinea; & quot baſis habet latera tot triangulis in vertice concurrentibus includitur undique pyramis.

Definitio. 346. *Corpus regulare* appellatur ſolidum figuris planis regularibus, & inter

ſe

ſe æqualibus terminatum, reliqua corpora dicuntur *Irregularia*.

347. Ejusmodi corpus regulare eſt *Tedraëdrum*, quod quatuor triangulis æquilateris & æqualibus comprehenditur. Definitio. Tab. VI. Fig. 99.

348. Ejusmodi quoque corpus regulare eſt *Octaëdrum*, quod octo triangulis æquilateris & inter ſe æqualibus eſt comprehenſum. Similiter & *Icoſaëdrum*, quod eſt ſolidum viginti triangulis æquilateris & inter ſe æqualibus comprehenſum. Definitio. Tab. VI. Fig. 100. Fig. 101.

349. Non minus corpus regulare eſt *Dodecaëdrum*, quod eſt ſolidum duodecim pentagonis regularibus & inter ſe æqualibus contentum. Definitio. Tab. VI. Fig. 102.

350. Plato in Timeo aquam, aërem, ignem, & terram cum corporibus regularibus comparat. Non dantur autem plura corpora regularia quam quinque, nempe quatuor modo commemorata & Cubus, qui ſex quadratis inter ſe æqualibus continetur.

351. Cubus, cujus latus DC eſt decem pedum, ſeu unius perticæ, appellatur *Pertica cubica*: cubus, cujus latus DC eſt unius pedis, dicitur *Per cubicus*; cubus, cujus latus unum CD eſt unius digiti appellatur *digitus cubicus*, &c. Definitio. Tab. VI. Fig. 96.

352. Pro menſura ſolidorum ſumitur pertica cubica, vel pes cubicus, aut digitus cubicus &c. menſura enim menſurato homogenea eſſe debet.

Problema. Tab. VI. Fig. 96. & 103. Resolutio.

353. *Invenire ſuperficiem ac ſoliditatem cubi.*

Cum ſuperficies cubi conſtet ſex quadratis inter ſe æqualibus (§. 341); latus cubi unum multiplicetur per ſe ipſum, & factum inde prodiens porro per 6. Erit productum poſtremum ſuperficies cubi.

Si factum, ex latere cubi in latus ipſum, denuo multiplicas per latus idem; prodibit ſoliditas cubi.

E. gr. Sit latus cubi DC = 23. fiet

DC = 23	ABCD = 529
23	DC = 23
69	1587
46	1058
ABCD = 529	*Solidit.* 12167
6	
Superficies = 3174	

Demonſtratio. Fig. 103. Quantitatem cubi inveſtigaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, aut digiti cubici in eo contineantur (§. 351, 352). Quodſi latus cubi in partes quotcunque æquales, e. gr. 4, divi-

viſum concipiatur, tot erunt cuborum ordines, quot in latere DE partes, & in quolibet ordine tot cubi, quot in baſi ſuperiore DCA quadratula. Igitur ſi baſin DCA, hoc eſt factum ex latere cubi in ſe ipſum (§. 245) multiplicas per latus cubi DE, prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. Q. e. d.

354. Si latus cubi 10, ſoliditas ejus eſt 1000. Unde ſi latus cubi eſt pertica ſeu 10 pedes; cubus major continet 1000 pedes cubicos, ſeu cubos minores 1000. pedem unum longos, latos, & altos. Pertica ergo cubica geometrica continet mille pedes cubicos, pes cubicus 1000 digitos cubicos, digitus cubicus 1000 lineolas cubicas. Coroll. 1.

355. Numerus ergo quilibet ſolidi quantitatem ſecundum menſuras geometricas deſignans diſpeſcitur in perticas, pedes, digitos cubicos; ſi nempe poſt tres quasque notas, a dextris ſiniſtrorſum progrediendo, unitate minuitur index. E. gr. Soliditas cubi ante (§. Coroll. 2.

353) inventa, nempe 12167‴, ita diſpeſcitur in pedes & digitos: 12′ 167″. Si inventa eſſet ſoliditas cubi cujusdam 36456789352‴ lineolarum cubicarum, diviſio ita fieret: 36‴ 456′ 789″ 352‴.

Theoremata. 356. *Priſmata, quorum baſes & altitudines ſunt æquales, æqualia ſunt.*

Demonſtratio. Concipiantur enim priſmata ſecari planis, quæ ſint parallela baſibus priſmatum, in diſcos quantumlibet tenues, & minimæ altitudinis. Quoniam priſmatum altitudines ſunt æquales *per hypoth.* ex uno priſmate tot prodibunt diſci, quot ex altero. Quare cum ſectiones quoque ſint baſibus parallelæ *per hyp.* hæ autem ſint baſibus æquales (§. 337), baſes vero ſint inter ſe æquales *per hyp.* diſci numero æquales *per dem.* erunt etiam æqualibus baſibus æquales; adeoque etiam æquales inter ſe (§. 16 *arith.*). Quare cum ſummæ ſint æquales, ſi æqualibus adduntur æqualia (§. 18 *arith.*) priſmata autem ſint veluti ſummæ diſcorum, in quos fuere diviſa; priſmata quoque æqualia ſunt. Q. e. d.

Corollar. 357. Igitur & *cylindri, quorum baſes & altitudines ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt;*

ſunt ; parallelepipeda quoque, *quorum baſes & altitudines ſunt æquales, inter ſe ſunt æqualia.* Eadem enim in his demonſtratio locum habet.

358. *Invenire ſoliditatem ac ſuperficiem parallelepipedi.* Problema Tab. VI. Fig. 95.

Reſolutio.

1. Quæratur area parallelogrammorum ABCD, BCFG, & CGDE (§. 245 &c.).

2. Addantur in unam ſummam, & hæc multiplicetur per 2. Factum erit ſuperficies parallelepipedi AG (§. 339.

3. Baſis ABCD multiplicetur per altitudinem DE. Factum erit ſoliditas quæſita (§. 353, 345, & ſeqq.).

E. gr. Sit AB = 30, BC = 35; CG = DE = 15, CD = AB, & parallelepipedum rectangulum, fiet

AB = 30'	BC = 35''	CD = 30''
BC = 35	CG = 15	DE = 15
ABCD = 1050''	175	CDGE = 450''

$$BFCG = 525''$$
$$ABCD = 1050$$
$$CDGE = 450$$

Summa = 2025''
2

Superficies = 4050'

$$ABCD = 1050'$$
$$DE = 15$$

5250

Soliditas = 15750''

359. In multiplicatione per 15 uſui fuit compendium aliquod, quodſi tironibus non illico pateat, multiplicationem ſuo more peragant idem factum inventuri.

Theorema. Tab. VI. Fig. 104. 360. *Parallelepipedum* ABCDEGIF *a plano diagonali* BDEI *dividitur in duo priſmata æqualia.*

Demonſt. Diagonalis linea BD dividit parallelogrammum ABCD in duo triangula æqualia (§. 241). Habent ergo priſmata ABDEFI & BCDEGI baſes æquales; habent quoque altitudinem eandem BI; ergo ſunt inter ſe æqualia (§. 356).

361. Eſt

361. Eſt ergo priſma triangulare dimidium parallelepipedi ejusdem altitudinis, ſed ſuper dupla baſi conſtituti. Corollar.

352. *Invenire ſoliditatem & ſuperficiem priſmatis.* Problema. Tab. VI. Fig. 94.

1. Quære priſmatis baſin ABC (§. 264).

2. Baſin ABC multiplica per altitudinem AD. Factum erit ſoliditas.

3. Eandem baſin ABC multiplica per 2.

4. Quære parallelogramma lateralia ACDE, BCEF, BADF (§. 245 &c.); eaque in unam ſummam collecta adde geminæ baſi inventæ *num.* 3. Summa poſtrema erit ſuperficies priſmatis.

Priſma eſt dimidium parallelepipedi ejusdem altitudinis, ſed ſuper dupla baſi conſtituti (§. 361). Sed parallelepipedi ſoliditas invenitur multiplicando baſin integram (ſeu baſin priſmatis duplam) per altitudinem (§. 358); ergo ſoliditas priſmatis reperietur multiplicando baſin priſmatis ſimplam per altitudinem. Cum reliqua priſmata omnia reſolvi poſſint in triangularia, omnium priſmatum ſoliditas eodem modo invenitur. Demonſtratio.

363. *Data cylindri altitudine & diametro invenire ejus ſoliditatem & ſuperficiem.* Problema.

Reſolutio. 1. Ex data diametro quæratur baſis (§. 285).

2. Baſis inventa multiplicetur per altitudinem datam. Factum erit ſoliditas cylindri quæſita.

3. Peripheria baſeos ex data diametro inventa multiplicetur per altitudinem cylindri datam. Factum erit ſuperficies lateralis.

4. Huic ſi additur duplum baſeos inventæ, ſumma erit ſuperficies tota cylindri.

Sit diameter cylindri 50''', altitudo 360''', erit (§. 283, 285)

Baſis = 196250''''	*Periph.* = 157'''
Altit. = 3600''''	*Altit.* = 360'''
	9420
117750000''''	471
58875	
	5652000'' ''''
Sol. cylind. 706500000'' ''' ''''	196250
	196250
	Superficies = 6044500''' ''''

Demonſtratio. Circulus conſiderari poteſt inſtar polygoni regularis laterum quantumlibet exiguorum (§. 277), adeoque cylindrus

drus inſtar priſmatis minimorum laterum. Invenitur ergo cylindri ſoliditas & ſuperficies eo, quo dictum eſt modo (§. 362). Q. e. d.

364. *Sectio pyramidis baſi parallela eſt baſi ſimilis.* Theorema.

Quoniam *ab* parallela rectæ AB *per hyp.* *Da* : DA = *ab* : AB (§. 296). Ob eandem rationem *Da* : DA = *ac* : AC, adeoque *ab* : AB = *ac* : AC (§. 98 *arith.*), unde *ab* : *ac* = AB : AC (§. 106 *arith.*). Cum non abſimili modo demonſtrari poſſit eſſe *ac* : *bc* = AC : BC, latera homologa baſeos & ſectionis pyramidis triangularis proportionalia ſunt. Quare cum triangula ſimilia ſint, quorum latera proportionalia ſunt (§. 157); ſectio pyramidis triangularis baſi parallela, baſi ſimilis eſt. Reliquæ pyramides cum in triangulares poſſint reſolvi, earum ſectiones ex triangulis ſimilibus ſimiliter poſitis componuntur, erunt igitur & ipſæ ſimiles (§. 152). Fig. 123. Tab. VIII. Demonſtratio.

365. *Pyramides æquales ſunt, quarum altitudines ſunt æquales, baſes autem æquales & ſimiles.* Theorema. Tab. VIII.

Sit ABC unum e triangulis ſuperficiei pyramidis unius, EDF unum ex iis quibus terminatur pyramis altera. Sint BC & EF in eadem recta BF, & BC = EF. Sint vertices pyramidum Fig. 124. Demonſtratio.

A &

A & D in eodem plano & AM ad BC, DO ad EF perpendicularis.

Quoniam porro AD per vertices pyramidum ducta eſt parallela rectæ BF *per conſtruct.* perpendicula AM & DO inter parallelas intercepta erunt æqualia (§. 178).

Ducatur præterea GK parallela rectæ BF & AD. Quoniam perpendicularis ad parallelarum unam perpendicularis quoque eſt ad alteram (§. 179); erunt AL & DN ad GK perpendiculares, adeoque etiam AL = DN (§. 178), & ob GK parallelam rectæ BF, erit quoque AG : AB = GH : BC = AL : AM (§. 296), & DN : DO = IK : EF (§. 291.). Quare cum ſit AM = DO & AL = DN *per demonſtr.* erit AL : AM = DN : DO (§. 99 *arith.*), ideoque & GH : BC = IK : EF (§. 98 *arith.*). Unde porro GH : IK = BC : EF (§. 100 *arith.*). Quare cum ſit BC = EF *per hyp.* erit GH = IK (§. 93 *arith.*). Similis demonſtratio in aliis planis pyramidum locum habet. Quare cum ſectiones pyramidum, quæ baſi ſunt parallelæ, ſint ſimiles (§. 364), adeoque anguli ſectionum homologi æquales (§. 151); plana ſectionum in eadem altitudine factarum non modo ſimilia

ſed

ſed etiam æqualia erunt (§. 135). Enimvero altitudines quoque pyramidum æquales ſunt *per hyp.* ergo non plura plana minimæ altitudinis obtineri poſſunt ex ſectione unius quam ex ſectione alterius. Pyramides igitur ſunt inter ſe æquales.

366. Si triangula BAC & EDF fuerint ſectiones triangulares conorum, erunt GH & IK diametri circulorum baſi parallelorum; adeoque cum ſit GH = IK *per demonſtr.* (§. 365), circuli iſti inter ſe ſunt æquales (§. 281). Unde eodem modo, quo prius (§. 365) demonſtratur, *conos eſſe æquales, quorum baſes & altitudines ſunt æquales.* Corollar.

Si quis acutior opponat diverſarum pyramidum, æquales & ſimiles baſes habentium, triangula lateralia non eſſe ſemper in eodem plano; ei ſatisfacere poteſt §. 51. Sphæricorum in Epitome.

367. *Omne priſma triangulare ſecari poteſt in tres pyramides inter ſe æquales.* Theorema.

Pyramides ADFE, & EBAC eandem habent altitudinem EB = AD, & æquales baſes DEF & ABC (§. 336); ſunt ergo inter ſe æquales (§. 365). Porro diagonalis CE ſecat rectangulum BCFE in duo triangula BCE & CEF inter Fig. 125. Tab. VIII. Demonſtratio.

ter ſe æqualia (§. 241); ſunt ergo pyramidum BCEA & CEFA baſes BCE & CEF inter ſe æquales. Quare cum eædem pyramides communem quoque verticem habeant in A, adeoque altitudinem eandem; ipſæ etiam inter ſe ſunt æquales (§. 365). Enimvero æqualia eidem tertio ſunt æqualia inter ſe (§. 16 *arith.*). Ergo tres pyramides, in quas ſecatur priſma triangulare, inter ſe ſunt æquales. Q. *e. d.*

368. Si priſma ex ligno paratum debita ratione ſecatur, pyramis CEFA magis in conſpectum prodit; unde demonſtratio tironum captui magis accommodatur. Imo æquale ſingularum pyramidum pondus ad bilancem examinari, indeque ad magnitudinis æqualitatem argumentum fieri poteſt.

Coroll. 1. 369. Pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis eandem cum ipſa baſin & altitudinem habentis.

Coroll. 2. 370. Cum quodlibet priſma polygonum in plura triangularia dividi queat; quælibet pyramis eſt tertia pars priſmatis ejusdem cum ipſa baſeos & altitudinis.

Coroll. 3. 371. Conus ſpectari poteſt inſtar pyramidis laterum quantumlibet exiguorum; erit ergo & ipſe tertia pars cylindri, ejusdem cum ipſo baſeos & altitudinis.

372. *In-*

372. *Invenire ſoliditatem pyramidis vel coni.* Problema.

1. Inveſtigetur ſoliditas priſmatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono baſin & altitudinem habentis (§. 366). Reſolutio.

2. Inventa dividatur per 3. Quotus erit ſoliditas quæſita (§. 370).

Aliter.

1. Baſis multiplicetur tertia parte altitudinis. Factum erit ſoliditas quæſita.

E. gr. Soliditas cylindri fuit (§. 363) 706500‴; erit ergo ſoliditas coni 235500‴.

373. *Invenire ſuperficiem pyramidis & coni.* Problema.

Superficies pyramidis habetur, ſi tam baſeos, quam ſingulorum triangulorum lateralium areæ inveſtigentur (§. 261, 264), & in unam ſummam colligantur. Reſolutio.

Coni ſuperficies cum demta baſi concipi poſſit ex innumeris triangulis conſtare, quorum altitudo communis eſt latus coni, omnium autem ſimul baſes conſtituit peripheria circuli, quem conus pro baſi habet;

1. Quæratur ex diametro baſis hujus peripheria;

2. Hæc

2. Hæc multiplicetur per dimidium coni latus; vel, ſi mavis, latus coni integrum multiplica per ſemiperipheriam. Factum erit ſuperficies coni lateralis (§. 342, 261, 371).

3. Quare ſi porro facto huic additur area circuli, cui conus inſiſtit, erit Summa ſuperficies coni.

Problema 374. *Invenire ſoliditatem coni truncati ABDC.*

Tab. VI. Fig. 105.

Reſolutio. 1. Quæratur differentia Semidiametrorum = EC, & altitudo coni truncati AE.

2. Inferatur: ut differentia Semidiametrorum CE ad altitudinem coni truncati EA; ita Semidiameter baſeos CF ad altitudinem coni integri FI, (§. 297).

3. Ex diametro baſis DC & altitudine integra FI quæratur ſoliditas coni integri (§. 372).

4. Ex diametro BA & differentia altitudinum coni truncati & integri IG quæratur ſoliditas coni minoris BIA (§. *cit.*).

5. Subtrahatur hæc a ſoliditate coni integri. Reſiduum erit ſoliditas coni truncati quæſita.

E. gr.

E. gr. Sit AE = 48'', DC = 60'' BA = 40'', erit FC = 30'', Ab = FE = 20''. Unde FC — FE = CE = 10''. Igitur CE : EA = CF : FI

10'' : 48'' = 30'' :

10) 1 3 3

144'' = FI

48 = AE = Fb

96'' = Ib.

100 : 314 = 30''

10) 10 3 3

942''' = *Semiperiph.* DFEC

300''' = FC

282600'' ''' *Baſis* DFEC.

1440''' FI

11304000

11304

2826

3) 406944000

135648000'' ''' *Conus* DIC.

$$100 : 314 = 20''$$
$$10)\ 10 \quad 2 \quad 2$$

$628'''$ *Semiperipheria* AgB.

$200'''$

125600 *Baſis* AgBbA.

$125600'''$ *Baſis* AgBbA.

$960'''$ I*b*

$7536000'''$
11304

3) 120576000

40192000 &c. *Conus* BIA
135648000 *Conus* DIC

95456000 *Conus truncatus* DBAC.

Theorema. Tab. VII. Fig. 106. 375. *Sphæra continet $\frac{2}{3}$ cylindri, qui pro altitudine habet diametrum ſphæræ, & pro baſi circulum æqualis diametri.*

Demonſtratio. Cylindrus oritur, ſi quadratum ABCD gyratur circa latus AB (§. 334), & eodem tempore Quadrans BAC deſcribit dimidiam ſphæram (§. 332), & triangulum ABD conum (§. 342). Quoniam trium ſolidorum altitudo AB eſt eadem, ſi ea in diſcos craſſitiei quantum-

tumlibet exiguæ ſecentur, numerus diſcorum in ſingulis erit idem; ſeu tot diſci ex hæmiſphærio quot ex cylindro, tot ex cylindro quot ex cono prodibunt. Ducatur recta EH parallela rectæ BC, ſitque EH ſemidiameter unius diſci cylindri, erit EG ſemidiameter diſci in hæmiſphærio, EF ſemidiameter diſci in cono. Quoniam diſci hi omnes ſunt circuli, ut ex geneſi ſolidorum patet, circuli autem quicunque ſint inter ſe ut quadrata diametrorum (§. 281), ſeu ut quadrata ſemidiametrorum (§. 103 *arith.*). erunt ergo diſci illi inter ſe ut quadrata rectarum EH, EG, & EF.

Quoniam EH parallela rectæ BC *per hyp.* erit EH = BC (§. 241); & quia BG & BC ſunt radii ejusdem circuli, etiam BC = BG (§. 48); adeoque & EH = BG (§. 16 *arith.*). Porro BA : AD = BE : EF (§. 297); eſt autem BA = AD (§. 213); ergo etiam BE = EF.

Quare cum diſci ex cylindro, hæmiſphærio, & cono excisi ſint inter ſe, ut quadrata rectarum EH, EG & EF *per dem.*; ſit autem EH = BG, EF = BE *per demonſtrata*; diſci illi erunt inter ſe ut quadrata rectarum BG, EG, & BE (§. 99 *arith.*). Enimvero in triangulo ad E rectangulo BEG, quadratum

EG relinquitur, ſi quadratum rectæ BE ſubtrahitur a quadrato hypothenuſæ BG (§. 272); ergo diſcus ſphæræ relinquitur, ſi diſcum coni ſubtrahis a diſco cylindri. Idem cum valeat de diſcis ſingulis aliarum ſectionum, ſoliditas ſphæræ dimidiæ relinquitur, ſi ſoliditas coni ſubtrahitur a ſoliditate cylindri. Enimvero conus eſt $\frac{1}{3}$ cylindri (§. 371); erit ergo ſphæra dimidia $\frac{2}{3}$ cylindri ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis. Igitur ſphæra integra $\frac{2}{3}$ cylindri dupli, ſeu ejus, qui eandem cum ſphæra altitudinem & baſin habet (§. 36 *arith.*).

Theorema. 376. *Si duo cylindri fuerint æquales; altitudines vero eorum & baſes inæquales fuerint; eorum altitudines & baſes ſunt reciproce proportionales*, ſeu altitudo primi eſt ad altitudinem ſecundi, ut baſis ſecundi ad baſin primi.

Demonſtratio. Si duo cylindri fuerint æquales, factum ex baſi primi in altitudinem primi æquale eſt facto ex baſi ſecundi in altitudinem ſecundi (§. 363). Enimvero hoc idem locum habet, ſi fuerit altitudo primi ad altitudinem ſecundi, ut baſis ſecundi ad baſin primi (§. 104 *arith.*); erunt ergo eorum baſes & altitudines reciproce proportionales. Q. e. d.

Ali-

Aliter.

Cum cylindri ſint æquales *per hyp.* erit factum ex baſi primi in altitudinem primi æquale facto ex baſi ſecundi in altitudinem ſecundi (§. 365). Sed ſi duo facta ſunt æqualia, factores ſunt reciproce proportionales (§. 113 *arith.*). Ergo altitudo primi eſt ad altitudinem ſecundi ut baſis ſecundi ad baſin primi. Q. e. d.

Si negas altitudinem primi eſſe ad altitudinem ſecundi, ut hujus baſis ad baſin illius, baſis ſecundi ad aliud quoddam B ſive majus ſive minus baſi primi eandem habebit rationem, quam altitudo primi ad altitudinem ſecundi. Igitur ſi majus & minus per eandem altitudinem primi multiplicas, factum ſemper æquale erit facto eidem tertio, nempe facto ex altitudine ſecundi cylindri in hujus baſin (§. 104. *arith.*); ergo etiam ſi majus & minus per eandem altitudinem primi multiplicas, facta erunt æqualia inter ſe (§. 16 *arith.*), quod manifeſte abſurdum (§. 36 Arith.).

377. Eodem modo liquet, *duo priſmata, vel duo parallelepipeda æqualia ſi fuerint, eorum baſes & altitudines eſſe reciproce proportionales.* Corollar.

Imo cum coni ſint tertia pars cylindri, piramides tertia pars priſmatis eandem baſin & altitudinem habentis (§. 370. 371); inde porro infertur, etiam *conos*

 vel

vel *pyramides æquales ſi fuerint, baſes & altitudines habere reciproce proportionales* (§. 103 *arith.*).

Theorema. 378. *Cubus diametri eſt ad ſphæram, ut 300 ad 157 fere.*

Demonſtratio. Si diameter ſphæræ 100, cubus diametri erit 1000000 (§. 353); ſoliditas autem cylindri eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habentis erit 785000 (§. 363); ideoque ſoliditas ſphæræ (§. 375) æqualis eſt $\frac{2}{3}$ ex 785000, ſeu $\frac{2}{3}$ ex $\frac{785000}{1}$ (§. 63 *arith.*) = $\frac{1570000}{3}$ (§. 60 *arith.*). Ergo cubus diametri eſt ad ſoliditatem ſphæræ, ut 1000000 : $\frac{1570000}{3}$, ſeu multiplicando utrinque per 3, ut 3000000 : 1570000 (§. 101 *arith.*) hoc eſt, ſi porro utrinque per 10000 dividitur, ut 300 : 157 (§. 103 *arith.*). Q. e. d.

379. Cum ratio diametri ad peripheriam circuli, quæ ſumitur ut 100 ad 314 duntaxat prope vera; hinc ratio quoque cubi diametri ad ſphæram dicitur eſſe fere, ut 300 ad 157.

Theorema. 380. *Sphæra æqualis eſt pyramidi, cujus baſis æquat ſuperficiem, altitudo radium ſphæræ.*

Demonſtratio. Sumamus ſuperficiem ſphæræ in qua-

dra-

dratula adeo exigua dividi, ut a planis non differant differentia aſſignabili; ſumamus porro ad angulos horum quadratulorum ex centro ſphæræ duci rectas; ſphæra conſtabit ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coeuntibus, quarum baſes ſimul ſumtæ æquant ſuperficiem ſphæræ, altitudo autem a radio ſphæræ differentia aſſignabili non differet. Sphæra igitur ſpectari poteſt ut pyramis, cujus baſis ſuperficiem ſphæræ, altitudo radium æquat.

381. *Superficies ſphæræ eſt ad circulum quemque maximum ſphæræ, ut 4 ad 1.* Theorema.

Sphæra æqualis eſt pyramidi, cujus altitudo radium, baſis ſuperficiem ſphæræ æquat (§. 380). Porro pyramidis ſoliditas eſt factum ex baſi in tertiam partem altitudinis (§. 372). Quare cum quotus ſit alter ex factoribus, ſi factum dividitur per factorem unum (§. 111, *arith.*), ſi ſoliditas pyramidis dividitur per tertiam partem altitudinis, quotus erit baſis pyramidis. Ergo ſi ſoliditas ſphæræ dividitur per $\frac{1}{3}$ radii, ſeu $\frac{1}{6}$ diametri, quotus erit ſphæræ ſuperficies. Demonſtratio.

Enimvero ſphæræ ſoliditas eſt factum ex $\frac{2}{3}$ Circuli maximi in diametrum (§. 375, 363) $= \frac{2}{3}$ (Circ. Max.) Diametr. Unde ſi dividitur per $\frac{1}{6}$ diametri,

metri, ſeu per $\frac{1D}{6}$, fiet ſuperficies $=$

$\frac{2}{3}(CM.D)\frac{6}{1D}$ (§. 65 *arith.*) hoc eſt $=$

$\frac{2.6\,CM.D}{3.1D} = \frac{2.6\,CM}{3}$ (§. 108 *arith.*) $= \frac{12}{3}$ Circ. Max. $=$ 4 Circ. Max. Q. *e. d.*

Aut, ſi mavis, demonſtrationem priorem ita proſequere: ſi diameter 100, area circuli maximi eſt 7850 (§. 285), & ſphæræ ſoliditas $\frac{1570000}{3}$ (§. 378), ſeu factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. cit.). Quare ſi $\frac{1570000}{3}$ dividitur per $\frac{100}{6}$, ſextam partem diametri, quotus 31400 erit ſuperficies ſphæræ *per demonſtrata.* Superficies ergo ſphæræ eſt ad aream circuli maximi ut 31400 ad 7850, hoc eſt, ſi utrinque dividitur per 7850, ut 4 ad 1. Superficies ergo ſphæræ eſt quadrupla circuli radio ſphæræ deſcripti.

Corollar. 382. Si diameter circuli 100, erit peripheria 314 (§. 278); adeoque ſuperficies

ficies ſphæræ 31400 (§. *præc.*) invenitur, ſi peripheria circuli maximi ducitur in diametrum. Eſt ergo ſuperficies ſphæræ æqualis rectangulo, cujus baſis peripheria circuli maximi, altitudo diameter ſphæræ (§. 251).

383. *Data diametro ſphæræ invenire ſoliditatem ejus & ſuperficiem.* Problema.

1. Ex data diametro quæritur peripheria circuli maximi (§. 283). Reſolutio.

2. Hæc ubi multiplicatur per diametrum, factum erit ſuperficies ſphæræ (§. 382).

3. Superficies ſi porro multiplicatur per $\frac{1}{6}$ diametri, vel ſi ſuperficies multiplicata per diametrum dividitur per 6, prodit ſoliditas ſphæræ (§. 380, 372).

E. gr. Sit diameter ſphæræ 50'', erit

Peripheria	157''
Diameter	50''
Sphæræ Superficies	7850''
Diameter	50
6)	392500''
Sphæræ Soliditas	65416$\frac{2}{3}$''.

O 5 384.

Problema. 384. *Invenire ſoliditatem ſphæræ alia methodo.*

Reſolutio. Cum cubus diametri ſphæræ ſit ad ejus ſoliditatem ut 300 ad 157 (§. 378),

1. Inveſtigetur cubus datæ diametri vel ex tabulis quadratorum & cuborum, vel ope arithmeticæ (§. 63 *arith.*).

2. Quæratur quartus numerus proportionalis (§. 110 *arith.*) ad 300, 157, & cubum diametri inventum. Erit is ſoliditas ſphæræ quæſita.

E. gr. *Si* diameter 50'', erit diametri cubus 125000, fiet ergo

$$\begin{array}{r} 300 : 157 = 125000 \\ 157 \\ \hline 875000 \\ 625 \\ 125 \\ \hline 196250|00(\\ 3) \quad |00| \\ \hline \end{array}$$

Sphæræ Soliditas $65416\,\tfrac{2}{3}$ ut ante.

Aliter.

385. Cum Sphæra ſit $\tfrac{2}{3}$ cylindri ſuper eadem baſi & ejusdem cum ſphæra altitudinis (§. 375).

1. Ex data diametro quæratur area cir-

circuli maximi (§. 285); erit hæc baſis cylindri.

2. Area inventa multiplicetur per diametrum. Factum, quod eſt cylindrus (§. 363),

3. Multiplicetur porro per 2, & productum dividatur per 3. Erit quotus cylindri ſoliditas.

E. gr. Si diameter 50'', erit

Area circuli 196250''' Quare fiat

Diameter 500'''

Cylindrus 98125000''''

(2 *multipl.*

3) 196250000

Soliditas Sphæræ 65416666 $\frac{2}{3}$

386. *Priſmata, Parallelepipeda, Cylindri, Coni & Pyramides, ſi altitudines habent æquales, ſunt inter ſe ut baſes; ſi baſes fuerint æquales, ſunt inter ſe ut altitudines.* Theorema.

Priſmata, Parallelepipeda, & Cylindri ſunt inter ſe, ut facta ex baſibus in altitudines (§. 362, 358, 363); Coni autem & pyramides ut facta ex baſibus in tertiam partem altitudinis (§. 372). Demonſtratio.

Quare

Quare cum facta eandem rationem habeant, quam quantitates per eandem tertiam multiplicatæ (§. 101 *arith.*); ſolida commemorata eandem rationem habent quam baſes, ſi altitudines æquales fuerint; aut ſi baſes æquales fuerint, altitudinum rationem habebunt. Q. e d.

Coroll. 387. Quoniam baſes cylindrorum ſunt circuli (§. 334), circuli autem inter ſe ſunt ut quadrata diametrorum (§. 281); *cylindri æque alti ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum*, quas habent baſes.

Theorema. 388. *Sphæræ ſunt inter ſe ut cubi diametrorum* ſeu Sphæræ ſunt in ratione triplicata diametrorum.

Demonſtratio. Indicet, enim S ſphæram majorem, D^3 cubum diametri hujus ſphæræ; $ſ$ ſphæram minorem, & d^3 cubum ejus diametri. Erit (§. 378)

$$D^3 : S = 300 : 157$$
$$d^3 : ſ = 300 : 157,$$

adeoque $D^3 : S = d^3 : ſ$ (§. 98 *arith.*)

Unde $D^3 : d^3 = S : ſ$ (§ 106 *arith.*).
hoc eſt: Sphæræ eandem inter ſe rationem habent, quam cubi diametrorum. Q. e. d.

Problema. 389. *Virgam pythometricam conſtruere, ad inveniendum numerum menſurarum e, g. vini*,

vini, cerevisiæ, olei &c. quas capit vas quoddam cylindricum. Tab. VII. Fig. 107.

Resolutio.

1. Diameter cylindri, qui unam capit menſuram, & quo paſſim ad fluida metienda utuntur, transferatur in rectam BA. Commodum eſt ſi vaſis hujus altitudo fuerit exigua.

2. In B erigatur perpendicularis longitudinis haud exiguæ; fiatque B1 = BA. Erit A1 diameter cylindri duas menſuras capientis, ſi quidem ejusdem eſt altitudinis cum cylindro menſuræ unius; id quod deinceps ſemper ſubintelligetur.

3. Fiat porro B2 = A1, erit A2 diameter cylindri tres menſuras capientis. Igitur

4. Similiter fit B3 = A2, B4 = A3, B5 = A4 &c &c.

5. Rectæ inventæ B1, B2, B3 &c. eodem modo, quo hic comparent, transferuntur in latus unum virgæ pithometricæ; in latus vero alterum altitudo cylindri unam menſuram capientis toties iterata transfertur, quoties id fieri poteſt. Eritque virga pithometrica conſtructa, quæ petebatur.

Demonſtratio.

Cum enim cylindri æque alti ſint inter ſe ut quadrata diametrorum; ſi plures cylindri eandem altitudinem habent, quem cylinder menſuræ uni æqua-

æqualis; erit quadratum diametri cylindri capientis menſuras duas duplum, capientis tres triplum, capientis quatuor quadruplum &c. quadrati ex diametro cylindri menſuram unam capientis. Enimvero cum B5 ſit perpendicularis ad BA *per hyp.* angulus ad B eſt rectus (§. 67), eſtque BA = B1 *per conſtr.* erit ergo quadratum rectæ A1 vel B2 duplum quadrati BA vel B1, A2 vel B3 triplum, A3 vel B4 quadruplum &c. (§. 272). Quare cum BA vel B1 ſit diameter cylindri menſuram unam capientis *per hyp.* erit B2 diameter cylindri capientis menſuras duas. B3 diameter capientis tres &c.&c. quorum tamen cylindrorum omnium eadem eſſe debet altitudo. Quare ſi latere virgæ pythometricæ B5 &c. exploras diametrum cylindrici vaſis, innoteſcit quot menſuræ baſin occupent in ea altitudine, quæ eſt cylindri menſuram unam capientis. Quodſi porro altero virgæ latere applicato inquiras, quoties altitudo cylindri menſuræ unius contineatur in altitudine vaſis cylindrici, innoteſcit quot menſuræ menſuris immineant. Quodſi ergo diametrum ducis in altitudinem, factum oſtendet vaſis capacitatem. Virga ergo pithometrica rite conſtructa. Q. *e.* f. & *d.*

E. gr.

E, gr. Si diameter reperitur 5, altitudo 9. erit capacitas 45 menſurarum.

390. *Examinare capacitatem dolii.* Problema. Tab. VII. Fig. 108. Reſolutio.

1. Latere virgæ conveniente explora diametrum dolii minorem prope AB, & majorem CD; latere virgæ altero longitudinem AE.

2. Experientia confiſſi dolia habent pro cylindris, quorum diameter ſit media arithmetice proportionalis ſeu æquidifferens inter diametrum dolii majorem & minorem. Hæc ergo quæratur (§. 97 *arith.*).

3. Inventa multiplicetur per longitudinem dolii, erit *per demonſtrationem problematis præcedentis* factum numerus menſurarum, quas capit dolium.

Cum tabulæ, ex quibus dolia conſtruuntur, ultra fundum promineant, longitudini utrinque detrahenda eſt quantitas prominentiæ unacum ejus dimidio, cui fundi craſſities æqualis ſupponitur.

391. *Invenire ſoliditatem corporis irregularis cujuscunque.* Problema. Tab. VII. Fig. 109.

1. Corpus datum immittatur in parallelepipedum cavum; ſuperfundatur eidem aqua, vel arena tenuior, quæ exacte ſuperius complanetur; noteturque diligenter altitudo aquæ vel arenæ AC.

2. Cor-

2. Corpore exemto, & arena rurſus accurate complanata, notetur denuo aquæ vel arenæ altitudo AB. Unde per ſubtractionem altitudinis AB ab AC reperitur BC.

3. Cum corpus datum æquale ſit parallelepipedo, cujus altitudo BC, baſis vero eadem cum baſi interiore parallelepipedi cavi, cui fuerat immiſſum; inveniri poteſt ſoliditas corporis irregularis (§. 358).

E. gr. Sit AC = 7″, AB = 5″, erit BC = 2″. Sit porro longitudo interior parallelepipedi cavi 20″, latitudo 10″, erit ejus baſis 200″, & ſoliditas corporis 400″.

392. Præſtat parallelepipedum altius humiliori, ut altitudinum differentia BC magis ſub ſenſus cadat. Quodſi corpus dimetiendum loco moveri nequit, ut ſtatua, circa illud parallelepipedum vel priſma quadrangulare ex aſſeribus erigitur, & ſpatium vacuum arena impletur, reliqua fiunt ut ante.

Problema. 393. *Cubum in plano deſcribere.*

Tab. VI. Fig. 96. 1. Conſtruatur rhombus ABCD (§. 237).

Reſolutio. 2. Super latus CD fiat quadratum (§. 234), &

3. Ex lateribus BC & CF rhombus.

Et factum eſt quod petebatur.

394.

394. *Parallelepipedum in plano deſcribere.* Problema Tab. VI. Fig. 95. Tab. VII. Fig. 109.

1. Conſtruatur rhombus vel rhomboides ABCD (§. 237, 238).

2. Super recta CD conſtruatur rectangulum ita, ut CG ſit altitudini parallelepipedi æqualis (§. 236).

3. Ex datis BC & GC conſtruatur rhomboides BCFG.

395. *Priſma* ABCDEF *in plano deſcribere.* Problema Tab. VI. Fig. 94. Reſolutio

1. Conſtruatur baſis e. g. ACB pro priſmate triangulari (§ 90 &c.).

2. Erigatur DA perpendicularis ad AB, & altitudini priſmatis æqualis (§. 165).

3. Hinc porro fiant parallelogramma ACED & BCEF (§. 234 & ſeqq.).

396. *Pyramidem* ADBC *in plano deſcribere.* Problema Tab. VI. Fig. 97.

1. Deſcribatur baſis e. g. triangulum ADB, ita tamen ut recta AB, utpote ab oculis averſa non exprimatur.

2. Super AD & DB conſtruantur triangula in puncto C coeuntia, vel aſſumto aut determinato puncto C ducantur rectæ AC, DC, BC.

397. *Retia deſcribere corporibus geometricis componendis accommodata.* Problema Tab. VII. Fig. 110.

In *a d* transferantur tria latera baſeos priſmatis triangularis *ab*, *bc*, *cd*; de-

ſcribatur rectangulum *adgf*, cujus latus *af* altitudinem priſmatis æquat, ſuper *bc* ope laterum *ab* & *cd* conſtruitur triangulum *bec*, & aliud ſimile in recta *fg*. Paratumque eſt rete pro priſmate triangulari. Quid fieri oporteat, ſi baſis eſt pentagona, hexagona, heptagona &c. ſatis oſtendit figura 111. Nempe ſuper quolibet pentagoni latere conſtruitur rectangulum, cujus latus alterum priſmatis altitudinem æquat &c.

Fig. 112. Rete tetraëdri deſcribitur, ſi 1 triangulum conſtruitur æquilaterum. 2. Singula ejus latera dividuntur bifariam in *a*, *b*, *c*, & 3 ducuntur rectæ *ab*, *bc*, *ca*.

Ut corpora ex retibus componi & conglutinari eorum partes queant, dum ex charta exſcinduntur, relinquendi ſunt margines, quos puncta indicant.

Fig. 113. Recta *cd* producatur in *e*, *bd* in *l*, *ag* in *k*, dum fiat *de* = *gd*, *dl* = *bd*, *gi* = *ik* = *ag*; ducique poſſunt *id*, *ek*, & *il*. Atque ita rete octaëdri abſolutum.

Fig. 114. Pro dodecaëdro deſcribe pentagonum regulare *amnor*. Applica regulam punctis *n* & *r*, & duc rectam *ru*; eandem regulam applica punctis *n* & *a*, & duc rectam *as*, fiat *as* = *ar* = *ru*;

&

& intervallo rectæ *ar* ex *s* & *u* fac arcus ſe interſecantes in *t*; obtinebisque pentagonum *astur*. Simili modo conſtrue reliqua pentagona quæ ſuperſunt omnia.

Pro *Icoſaëdro* conſtrue triangulum æquilaterum *aco* (§. 90); latus *ao* produc in *d*, & in *ad* quater transfer latus *ao*; rectæ *ad* duc parallelam *ce* (§. 180, 181), & in hanc quinquies transfer latus *ao*. Produc *ac* in *m*, ut ſit *cm* = *ac*. Applica regulam punctis *o* & *n*, *r* & *u*, *s* & *z*, *x* & *y*, & duc rectas *fg* &c. ſimiliter regulam applica punctis *d* & *y*, *x* & *z*, *s* & *u*, *r* & *n*; *o* & *c*, ducque rectas *db* &c. &c. Tandem fac *yb* = *ye*, & *of* = *oa*, & duc rectas *eb* & *fa*, eritque rete pro icoſaëdro abſolutum. Tab. VII. Fig. 115.

In rectam *ab* transfer quater latus *au*, & conſtrue rectangulum *abgb* ita, ut ſit *ab* = *au* (§. 236). Duc rectæ *ab* parallelas *uc*, *xd*, *oi*, & produc *xd* & *oi* utrinque, dum fiat *xt* = *xd* = *de* & *os* = *oi* = *if*. Denique duc rectas *ts* & *ef*; & abſolutum eſt rete pro *hexaëdro* ſeu *cubo*. Fig. 116.

In rectam *bd* transfer ex *b* in *c* longitudinem, ex *c* in *o* latitudinem, ex *o* Fig. 117.

in *r* longitudinem, ex *r* in *d* latitudinem parallelepipedi. Fiat ad *bd* perpendicularis *ba*, quæ ſit æqualis altitudini parallepipedi, & conſtruatur rectangulum *baed*. Ducantur porro rectæ *ab* parallelæ *uc*, *to*, *nr*, *ed*. Producantur *to* & *nr* utrinque, ut ſit *os* = *co*, *rx* = *rd*, *bt* = *ut*, *nm* = *ne*; eritque abſolutum rete pro *parallelepipedo*.

Fig. 118. Tab. VII. Sit *ca* latus unum pyramidis; eo aſſumto inſtar radii ex *c* deſcribatur arcus *ab*; in hunc transferantur tria latera baſeos, quam habet pyramis, *ao*, *ou*, *ub*. Fiat ex datis *ao* & *ub* ſuper *ou* triangulum *xou* ceu baſis pyramidis, ducanturque rectæ *oc*, *uc*, & *bc*, eritque rete *pyramidis* abſolutum.

Fig. 119. Pro *cylindro* fiat rectangulum BADC, cujus altitudo BA diametro baſis BF, longitudo BC peripheriæ baſis ſeu circuli Fn Bm ſit æqualis. Producatur BA in F & E, dum ſit BF = AB = AE; & ſuper FB, & AE deſcribantur circuli. Rete cylindri ejusdem altitudinis ac latitudinis erit abſolutum.

Fig. 120. Similiter pro *Cono* fiat ſector, cujus radius DC lateri coni, arcus CE peri-

phe-

pheriæ baſis AB ſit æqualis. Connectatur ſectori circulus AB, quem conus pro baſi habet, eritque rete coni abſolutum.

Coronidis loco ad uſum practicum juvat annectere ſequentia duo problemata.

398. *Figuram ovalem deſcribere datæ longitudinis & latitudinis.* Problema.

1. Latitudo CD & longitudo AB ſeſe mutuo biſecent perpendiculariter in L (§. 169). Reſolutio Tab. VIII. Fig. 126.

2. Radio EA arbitrario, dum ſit minor quam CL, duc arcum circularem MN.

3. Eodem radio ex F duc arcum PQ.

4. Eundem radium ex D transfer verſus L in H, & connecte linea recta puncta E & H.

5. Rectam EH divide bifariam in I, & perpendicularem IG produc, donec occurrat rectæ CL, productæ ſi opus eſt, in G.

6. Intervallum LG transfer ex L in K.

7. Intervallo GD ex G centro deſcribe arcum NDQ.

8 Eodem intervallo, ſeu quod æquale eſt, intervallo KC ex K centro deſcribe arcum MCP.

Dico fore ut arcus NDQ occurrat arcui MN & QP; & arcus MCP iisdem.

Demonſtratio. Eſt enim EI = IH *per conſtruct.* anguli ad I ſunt recti *per eand.* GI = GI. Ergo & GE = GH (§. 129; 136). Porro EN = HD *per conſtr.* Igitur ſi æqualibus adduntur æqualia, erit GN = GD (§. 18 *arith.*). Pariter AE = FB, AL = LB *per conſtruct.* Ergo AL — AE = BL — BF (§. 29 *arith.*); hoc eſt, EL = FL. Eſt autem porro GL = GL, & anguli ad L ſunt recti *per conſtruct.* adeoque æquales (§. 129). Ergo GE = GF (§. 136); adeoque ob FQ = EN erit GN = GQ (§. 18 *arith.*). Quare cum ſit etiam GN = GD, erit GD = GQ (§. 16 *arith.*). Attingit ergo GD arcum NM & QP. &c.

Problema Tab. VIII. Fig. 127. 399. *Lineam ſpiralem deſcribere.*

Reſolutio. 1. Duc rectam HG pro arbitrio producendam.

2. Elige in ea punctum C, & radium CA pro lubitu; & duc ſemicirculum AMB.

3. Circini pede uno fixo in A, radio AB duc ſemicirculum BND.

4. Transfer pedem circini ex A in C, & radio CD duc ſemicirculum DE.

5. Collocato rurſus pede uno circini in A, radio AE duc ſemicirculum EF; atque ita porro quouſque libuerit.

Finis Geometriæ.

TRIGONOMETRIA.

CAPUT I.

De Notionibus primis Trigonometriæ, nec non de Sinibus ac Tangentibus naturalibus.

Definitio. 1. TRigonometria *eſt* ſcientia ex datis tribus trianguli partibus inveniendi reliquas ope calculi.

Fig. 1. E. gr. Si datur in triangulo ACB angulus A, latera AC & AB; trigonometria docet invenire latus CB, & angulum tam B quam C. Et ſic de reliquis. Si tamen dantur tres anguli, latera trianguli rectilinei inde inveniri nequeunt; cum iidem anguli cum diverſis admodum lateribus poſſint conſiſtere.

Definitio. Fig. 2. 2. *Sinus* arcus DB, vel anguli DCB, dicitur DE dimidium chordæ DF, quæ ſubtendit arcum DF, duplum arcus DB. Eadem dimidia chorda DE dicitur

tur quoque ſinus arcus DHG, vel anguli DCG. Chorda enim integra DF ſubtendit quoque arcum DGF, qui eſt duplum arcus DHG.

Arcus BD eſt menſura anguli DCB, & arcus DHG menſura anguli DCG. Unde idem eſt ſinus horum arcuum & angulorum.

3. Angulus DCG oritur crure alterius DCB uno, nempe BC, producto verſus G. Sunt ergo anguli DCB & DCG deinceps poſiti. *Duo* igitur *anguli deinceps poſiti* eundem ſinum habent (§. 130 *Geom.*). Corollar.

4. Arcus DHG eſt complementum arcus BD ad Semicirculum ſeu 180°. Eundem ergo ſinum habent arcus, & complementum ejus ad 180°. Corollar.

5. Cum radius BC, chordam DF biſecans, ſit ad eandem perpendicularis (§. 210 *Geom.*); ſinus arcus cujuslibet eſt ad radium perpendicularis. Unde plures ſinus diverſorum arcuum eidem radio inſiſtentes ſunt inter ſe paralleli (§. 183 *Geom.*). Corollar.

6. Recta BA in puncto radii CB & arcus BD extremo B ad radium perpendicularis, dicitur *Tangens* arcus BD, recta vero CA arcus BD & anguli BCD *Secans*. Definitio.

Nempe *Tangens* BA in puncto concurſus radii & arcus B erigitur perpendiculariter ad radium, & tamdiu producitur, donec ei occurrat in A recta CA ex centro circuli C per alterum arcus extremum D ducta, quæ *Secans* appellatur.

Definitio. 7. Pars radii BE inter Tangentem BA & Sinum DE intercepta dicitur *ſinus verſus* arcus BD.

Definitio. 8. DL ſinus arcus DH, qui eſt arcus prioris BD complementum ad 90, dicitur *Coſinus* arcus BD. Et HI Tangens ejusdem arcus DH, dicitur *Cotangens*, recta vero CI *Coſecans* arcus BD.

Definitio. 9. Radius BC vel HC vocatur *Sinus totus*.

Corell. 1. 10. Quoniam radius HC eſt ſinus quadrantis BH (§. 2); ſinus totus eſt ſinus anguli recti.

Corollar. 11. Cum DE & HC ſint ſinus diverſorum arcuum (§. 2) eidem radio BC inſiſtentes, ideoque inter ſe paralleli (§. 5), & ſecentur a recta DC, anguli alterni EDC & DCL ſunt æquales. Porro E & L fiunt a ſinu DE & DL, adeoque a perpendicularibus ad radium (§. 5); igitur ſunt recti & æquales (§. 67, 129 *Geom.*). Igitur in triangulis DCE & DCL, latus DC com-

communehabentibus anguli duo, ideoque & ii, qui ſunt ad DC (§. 191 *Geom.*) ſunt utrinque ſingillatim æquales. Eſt ergo & Coſinus DL = EC, & Sinus DE = LC (§. 137 *Geom.*).

12. Igitur arcus AD, cujus ſinus eſt AB, coſinum habet BC. Quadratum ergo radii AC = quadratis Sinus & Coſinus ſimul ſumtis (§. 272 *Geom.*). Corollar. Fig. 3.

13 *Dato ergo ſinu* DE *invenitur coſinus* DL, ſi á quadrato ſinus totius DC ſubtrahitur quadratum ſinus, & ex reſiduo extrahitur radix quadrata. Hæc erit coſinus quæſitus. Corollar. Fig. 2.

14. Ut appareat opus non fuiſſe pro diverſis radiis novum ſemper inſtaurare calculum; & quomodo ſinus, tangentes & ſecantes pro omnibus circulis & gradibus inveniri potuerint, ſequentia perpendenda ſunt.

15. *Sinus* AB & ab *arcuum ſimilium* AD & ad *ad ſuos radios* AC & ac *eandem rationem habent.* Theorema. Fig. 3.

Sunt enim ſinus AB & *ab* perpendiculares ad DC & *dc* radios (§. 5), adeoque anguli ad B & *b* recti (§. 67. *Geom.*) & triangula ABC & *abc* ſunt rectangula. Porro arcus AD & *ad* ſunt ſimiles *per hypoth.* eundem ergo numerum graduum continent (§. 155 *Geom.*). Unde menſuræ angulorum C & *c* ſunt æquales (§. 58 *Geom.*); ergo & C = *c* Demonſtratio.

(§.

(§. 82 *Geom.*). Igitur AB : BC = *ab*: *bc*, & AB : AC = *ab*; *ac* (§. 162, 151 *Geom.*). Q. e. d.

16. Aſſumta eſt ergo unitas ſeu 1 ceu Sinus totus cujuslibet circuli. Sed unum hoc ad exprimendos ſinus minores diviſum eſt in particulas 10000000. Ope autem Geometriæ & Arithmeticæ inventum eſt, ſi radio ſeu ſinui 90 graduum tribuantur 1000000 particulæ, quot ejusmodi particulæ cedant ſinui cujuslibet gradus, imo ſinui unius vel plurium minutorum etiam ſecundorum.

17. Veteres diviſerunt radium in partes 60; & partem ſexageſimam in alias partes 60 minores, & ſic deinceps, ut hodie horam dividimus in minuta prima, ſecunda, tertia. Et per talia minuta expreſſere chordas ſingulorum arcuum. Chordis integris dimidias ſeu ſinus ſubſtituere Saraceni. Diviſioni in partes minores ſexageſimas ſubſtituit diviſionem in partes decimales Joannes Regiomontanus, qui demum etiam radium conſtituit unitatem, & hanc in particulas decimales, ut hodie fit, diviſit.

Problema. 18. *Dato Sinu* DE *invenire tangentem* AB *&* *ſecantem* AC *ejusdem arcus* BD.

Reſolutio & Demonſtratio. Tab. Trig. I. Fig. 2. Quoniam tangens AB, & Sinus DE ſunt ad radium BC perpendiculares (§. 6, 5); erit in triangulo ACB, baſi AB parallela recta DE (§. 183 *Geom.*). Igitur coſinus CE : DE = BC : BA, ſeu ut coſinus ad Sinum, ita radius ad tangentem; & EC : CD = CB : CA, ſeu

ſeu ut coſinus ad radium, ita radius ad ſecantem (§. 296 *Geom.*). Inveniri ergo poteſt tam tangens, quam ſecans (§. 110 *arith.*).

19 Quoniam Sinus & tangentes numeri ſunt grandes, quorum multiplicatio & diviſio abſque magno labore abſolvi nequit; trignometriæ praxes mire faciliores reddidit Joannes Neperus inventis aliis numeris, quos logarithmos appellamus. Hi enim multiplicationem in additionem, diviſionem vero in ſubtractionem convertunt. De Logarithmis igitur nonnullis dicere neceſſe eſt.

CAPUT II.

De Logarithmis & fractionibus decimalibus.

20. Series quantitatum ſecundum eandem differentiam creſcentium vel decreſcentium appellatur *Progreſſio arithmetica*. Definitio.

21. Partes ſingulæ ſeriei appellantur *Termini progreſſionis*; & numerus terminorum appellatur *Latus progreſſionis*.

22. E. gr. Sit ſeries numerorum ejus conditionis, ut ſequens præcedentem ſemper excedat ternario, creſcent ii ſecundum eandem differentiam, nempe 3.

23. Ut ſi fuerit

	0	3	6	9	12	15	18	21
vel	1	4	7	10	13	16	19	22

ubi

ubi 0, 3, 6, 9 &c. ſunt termini primæ progreſſionis, latus autem erit 8.

24. Simpliciſſimum exemplum progreſſionis arithmeticæ præbet ſeries numerorum naturalis, ubi terminus ſequens ſemper unitate excedit præcedentem, ut

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 &c.

25. Quodſi terminos ſeriei creſcentes legis ordine retrogrado, habes exemplum ſeriei quantitatum ſecundum eandem differentiam decreſcentium, ut

21 18 15 12 9 6 3 0.

26. Series quantitatum ſecundum eandem rationem creſcentium vel decreſcentium appellatur *Progreſſio Geometrica.*

E. gr. 1 2 4 8 16 32 64 &c.
vel 243 81 27 9 3 1.

Definitio. 27. Si numeris geometrice proportionalibus ſubſcribuntur totidem alii arithmetice proportionales, ſeu æquidifferentes, hi dicuntur illorum *logarithmi* (λογων αριθμος, rationum numerus).

Corollar. 28. Sunt ergo etiam logarithmi termini progreſſionis cujusdam arithmeticæ terminis progreſſionis cujusdam geometricæ reſpondentes.

29. E. gr. Sint datæ progreſſiones

Ge-

Geometrica	1	2	4	8	16	32	64
Arithmetica	0	1	2	3	4	5	6

erunt numeri ſeriei poſterioris numerorum prioris logarithmi; nempe 0 logarithmus unitatis, 1 logarithmus binarii, 2 logarithmus quaternarii, 3 logarithmus octonarii, 5 logarithmus numeri 32 &c.

30. *Si logarithmus unitatis eſt 0, logarithmus facti æqualis eſt ſumma logarithmorum factoribus reſpondentium.* Theorema.

E. gr. 16 = 2.8. Eſt ergo 16 factum ex factoribus 2 & 8. In ſerie logarithmorum exempli ſuperioris (§. 29) logarithmus unitatis eſt 0; dico ergo logarithmum facti 16 æqualem fore ſummæ logarithmorum factoribus 2 & 8 reſpondentium, ut in dicto exemplo manifeſtum eſt, ubi 1 + 3 ſunt logarithmi factoribus reſpondentes, 4 eſt logarithmus facti. Idem deprehendes in aliis ſuperioris exempli numeris. Sic 6 ſumma logarithmorum 2 + 4 eſt logarithmus facti 64 ex factoribus 4 & 16 &c.

In multiplicatione unitas eſt ad multiplicantem, ut multiplicandus ad factum (§. 33 *arith.*); logarithmus igitur facti eſt numerus quartus arithmetice proportionalis ad logarithmum unitatis, & ad logarithmos multiplicanti & multiplicando (id eſt, factoribus) (§. 34 *arith.*) reſpondentes (§. 27). Quare cum logarithmus unitatis ſit 0 per Demonſtratio.

hypo-

hypotheſin; logarithmus facti æqualis erit ſummæ logarithmorum factoribus reſpondentium (§. 112 *arith.*). Q. e. d.

Corollar. 31. Cum numerus quadratus oriatur ex factoribus æqualibus, ſeu radice in ſe ipſum ducta (§. 67 *arith.*); logarithmus quadrati æqualis eſt duplo logarithmo radicis.

32. E. gr. Quadrati 16 logarithmus 4 æqualis eſt 2, logarithmo radicis 4, bis ſumto. Quadrati 64 logarithmus 6 æqualis eſt duplo ipſius 3, logarithmi radicis 8.

Corollar. 33. Dimidium ergo logarithmi numero dato reſpondentis, eſt logarithmus radicis quadratæ ejusdem numeri dati.

34. E. gr. 3 dimidium logarithmi 6 numero 64 reſpondentis eſt logarithmus reſpondens radici quadratæ numeri 64, quæ eſt 8.

Corollar. 35. Cum Cubus oriatur radice ter poſita & in ſeſe ducta (§. 68 *arith.*) ſeu ex tribus factoribus æqualibus; logarithmus cubi æqualis eſt triplo logarithmo radicis (§. 30).

36. E. gr. Logarithmus 6 cubi 64 æqualis eſt logarithmo 2 radicis cubicæ 4 ter ſumto. Similiter logarithmus 3 cubi 8 eſt triplum logarithmi 1 radicis cubicæ 2.

37.

37. Logarithmus ergo radicis cubicæ eſt tertia pars logarithmi numero cubico reſpondentis. Corollar.

38. E. gr. 2 tertia pars logarithmi 6 cubo 64 reſpondentis eſt logarithmus numeri 4, qui eſt radix cubica ex 64. Similiter 1 tertia pars logarithmi 3 cubo 8 reſpondentis eſt logarithmus radicis cubicæ 2.

39. *Si logarithmus unitatis eſt* 0, *erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum diviſoris & dividendi.* Theorema.

Eſt enim in omni diviſione unitas ad quotum, ut diviſor ad dividendum (§. 42 *arith.*); igitur logarithmus quoti eſt quartus numerus arithmetice proportionalis ad diviſorem, dividendum, & unitatem (§. 27). Quare cum logarithmus unitatis ſit 0 *per hypoth.* logarithmus quoti eſt differentia dividendi a diviſore (§. 112 *arith*). Q. e. d. Demonſtratio.

40. E. gr. Logarithmus 2 quoti 4 invenitur, ſi logarithmus (3) diviſoris 8 ſubtrahitur a logarithmo (5) dividendi 32.

41. Unde logarithmus fractionis impropriæ ſeu ſpuriæ reperitur, ſubtrahendo logarithmum denominatoris a logarithmo numeratoris. Cum integri numeri, quibus fractio adhæret, ut $3\frac{2}{3}$, ad fractionem ſpuriam reduci poſſint (§. 63 *arith.*), patet etiam modus in- Corollar.

inveniendi logarithmos iis reſpondentes. E contrario logarithmus fractionis propriæ invenitur, ſi logarithmus numeratoris ſubtrahitur a logarithmo denominatoris, & reſiduo præfigitur ſignum ſubtractionis.

42. Nempe cum in fractione propria denominator ceu diviſor ſit major numeratore ceu dividendo; major autem numerus a minore ſubtrahi nequeat; ſubtrahitur minor a majore; reſiduo autem præfigitur ſignum ſubtractionis. Reſiduum ſcilicet etiamnum ſubtrahendum eſſet, ſed cum nihil ſit unde ſubtrahi queat, ſubtractio facienda indicatur duntaxat. Sicut ſi cui ſolvendi eſſent floreni 9 & non haberet, niſi 5; ſolutis quinque debet adhuc 4, qui indicantur per — 4. Præterea fractio eſt pars unitatis (§. 50 *arith.*) adeoque unitate minor. Sed unitatis logarithmus eſt o (§. 29). Ergo logarithmus fractionis ſe tenet ex parte numerorum a cyphra deſcendentium, ſeu iis, qui a cyphra creſcunt aut aſcendunt, oppoſitorum. Nam ſeries numerorum a cyphra creſcentium eſt

o 1 2 3 4 5 6 &c.

decreſcentium a cyphra ſeu prioribus oppoſitorum ſeries eſt

— 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 o

utraq. ſimul ſic exhib. — 3 — 2 — 1 o 1 2 3 &c.

43. Ex dictis hactenus (§. 30 & ſeqq.) intelligitur, cur per logarithmos mutetur multi-

tiplicatio in additionem (§. 30), diviſio in ſubtractionem (§. 39, 41), extractio radicis quadratæ in diviſionem per 2 (§. 33), extractio radicis cubicæ in diviſionem per 3 (§. 37).

44. Ut ea, quæ de logarithmis dicenda ſuperſunt, penitius intelligantur, plurimum juverit hoc loco interponere aliqua de fractionibus decimalibus.

45. *Fractio decimalis* eſt, cujus denominator eſt articulus quidam numerorum primarius, quales ſunt 10, 100, 1000, 10000 &c. Nempe articulus primarius dicitur unitas cum adhærentibus cyphris, una vel pluribus. Definitio.

46. Fractionum decimalium denominatores progrediuntur in ratione decupla. Coroller.

47. E. gr. Si fuerit fractio decimalis $\frac{57932468}{100000000}$, ea æquivalet huic ſeriei

$$\frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{2}{100000}$$

$$+ \frac{4}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \frac{8}{100000000}$$

48. *Fractionem quamcunque datam convertere in decimalem.* Problema.

Reſolutio. Ad fractionis datæ denominatorem, & numeratorem, atque ad articulum primarium vel datum vel pro arbitrio aſſumtum quæratur numerus quartus proportionalis (§. 110 *arith.*). Erit hic numerator fractionis decimalis quæſitæ.

Demonſtratio. Quoniam numerator inventus eſt quartus proportionalis ad denominatorem & numeratorem datum, atque ad articulum quendam primarium *per hypoth.* Articulus primarius aſſumtus ad numeratorem inventum eandem rationem habet, quam denominator datus ad numeratorem datum (§. 93. *arith.*). Quare cum articulus primarius aſſumtus & denominator datus idem totum repræſentent in partes modo plures modo pauciores diviſum (§. 51 & ſeqq. *arith*), idem totum eandem rationem habet ad numeratorem datum, & numeratorem inventum. Sed ea, ad quæ idem eandem rationem habet, æqualia ſunt (§. 100 *arith.*); ergo numerator datus & inventus exprimunt partes æquales ejusdem totius ad quod referuntur. Fractio ergo inventa æqualis eſt fractioni datæ (§. 50 *arith.*). Q. e. d.

49. Sit fractio $\frac{3}{5}$ convertenda in decimalem. Articulus primarius aſſumi poteſt vel 10, vel 100, vel 1000 &c. Fiet ergo

$$5 : 3 = 10 : 6$$

$$5)30(6$$

erit ergo $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, vel $\frac{60}{100}$, vel $\frac{600}{1000}$.

50. Cum unitas per multiplicationem nihil novi producat, problema præſens (§. 48), brevius ita reſolvitur:

1. Numeratori datæ fractionis tot a dextris jungantur cyphræ, quot habet articulus primarius datus, vel aſſumtus.

2. Numerus inde prodiens dividatur per denominatorem fractionis datæ. Quotus inventus erit numerator fractionis decimalis quæſitæ.

51. E. gr. $\frac{1}{60} = \frac{10000|0}{6\ \ |0} = \frac{1666}{100000}$ &c.

$\frac{1}{240} = \frac{1000000|0}{24\ \ |0} = \frac{41666}{10000000}$ &c.

$\frac{1}{480} = \frac{10000000|0}{48\ \ |0} = \frac{208333}{100000000}$ &c.

Primum paragraphi hujus exemplum exhibet crucigerum, alterum nummum, tertium obolum in partibus decimalibus floreni.

52. Equidem frequenter accurata fractio decimalis, quæ datæ prorſus æquivaleat, haberi nequit; poſſumus tamen ad veram tam prope accedere, ut defectus ſenſum omnem effugiat, modo totum in plures pluresque partes dividi queat. Sic in primo exemplo ſuperioris paragraphi (§. 51) inveniri nequit fractio decimalis crucigerum exacte repræſentans, data tamen $\frac{1666}{100000}$, ne quidem particula floreni centies milleſima deficit a vera quantitate crucigeri. *Fractio decimalis*, quæ veram exhibet rationem partis, quam deſignat, ad totum, appellatur *exacta*; quæ autem rationem partis, quam deſignat, ad totum, exhibet prope veram, nempe vel vera minorem vel vera majorem, ita tamen, ut exceſſus vel defectus minor ſit, quam unitas notæ ultimæ conveniens, dicitur *fractio decimalis approximans*. Sic $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ eſt fractio decimalis exacta; e contrario $\frac{1666}{100000}$ eſt fractio decimalis approximans; quia rationem crucigeri ad florenum exhibet non niſi prope veram; ita tamen, ut defectus minor ſit quam $\frac{1}{100000}$ floreni; nempe minor quam unitas ex iis, quæ in nota ultima $\frac{6}{100000}$ continentur.

53. Cum in fractionibus decimalibus denominator ex meris cyphris & præfixa unitate conſtet, omitti ſolet. Quodſi fractio decimalis adhæret integris, ut ſi ſit $5\frac{6}{10}$, poſt integros numeros fit punctum. Ergo pro $5\frac{6}{10}$ ſcribimus 5 . 6, pro $7\frac{43}{100}$ ſcribimus 7 . 43. Si fractio decimalis nulli adhæret integro præponitur puncto cyphra. Unde pro $\frac{6}{10}$ ſcribimus 0 . 6, pro $\frac{43}{100}$ ſcribimus 0 . 43. Quodſi

ſi fractio decimalis incipiat a centeſimis, milleſimis &c. loca vacua replentur cyphris. Sic pro $\frac{1666}{100000}$ ſcribimus 0. 01666, pro $\frac{32}{100000}$ ſcribimus 0. 00032, pro $8\frac{54}{1000}$ ſcribimus 8. 054.

54. Commodiſſimum eſſe deprehenditur, ſi progreſſionis geometricæ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000 &c. conſtituantur logarithmi 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Unde ſi fractiones decimales ſub forma numerorum integrorum ſcribuntur, progreſſioni geometricæ commemoratæ reſpondent logarithmi 0. 0000000, 1. 0000000, 2. 0000000, 3. 0000000, 4.0000000 &c.

55. Notari meretur Characteriſtica logarithmorum quæ pro numeris ab 1 ad 10 eſt 0., pro numeris a 10 ad 100 eſt 1., pro numeris a 100 ad 1000 eſt 2. &c. Viſo nempe logarithmo ex prima ejus nota intelligitur an conveniat numero inter 1 & 10, vel inter 10 & 100, aut inter 100 & 1000 &c. interjacenti (§. 54).

56. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.* Problema.

1. Logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii. Reſolutio.

2. Ab aggregato ſubtrahatur logarithmus primi. Reſiduum eſt logarithmus numeri quarti proportionalis (§. 110 *arith.* & §. 30, 39 *Trigon.*). Exemplum ſit hujusmodi: dentur numeri 6, 30, 9. Quæratur quartus proportionalis. Fiet

Log.	30	=	1 . 4771212
Log.	9	=	0 . 9542425
Summa		=	2 . 4313637
Log.	6	=	0 . 7781512
Log. quæſitus		=	1 . 6532125

cui in tabulis reſpondet numerus 45.

Problema. 57. *Dato logarithmo coſinus invenire logarithmum ſecantis.*

Reſolutio. Cum ſit coſinus ad radium, ut radius ad ſecantem (§. 18); a duplo logarithmo ſinus totius ſubtrahatur logarithmus coſinus; erit reſiduum logarithmus ſecantis (§ 56).

Problema. 58. *Invenire numerum reſpondentem logarithmo, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

Reſolutio. I. Si dantur in tabulis, quæ ad manum ſunt, logarithmi characteriſticæ majoris, quam ſit logarithmus datus; augeatur logarithmi dati characteriſtica, & quæratur ſub characteriſtica majore; qui enim ibi eidem reſpondet numerus tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteriſticæ unitates acceſſere (§. 54. 55.)

E. gr. Sit quærendus numerus reſpondens logarithmo 0 . 9245306. Hic in tabulis ſe-

curi-

curatus non occurrit, logarithmo autem, qui proxime minor eſt logarithmo dato, reſpondet numerus 8. Quodſi, hoc numero integro 8 non contentus, quæris inſuper fractiones decimales logarithmo dato reſpondentes, ſic age: Si non eſt ad manum niſi tabula logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 ad 1000; in ea occurrent logarithmi characteriſticæ 2. Auge ergo duabus unitatibus characteriſticam, ut habeas 2 . 9245306. Quære ſub hac majore characteriſtica logarithmum datum, & deprehendes logarithmo proxime minori in tabulis reſpondere 840. Habes ergo pro logarithmo 0 . 9245306 præter 8, etiam $\frac{40}{100}$. Quodſi ad manum ſunt tabulæ ab 1 ad 10000 extenſæ, auge characteriſticam tribus unitatibus, & quære logarithmum 3 . 9245306, reperies logarithmo tuo majorem paululo 3 . 9245377, cui reſpondet numerus 8405. Igitur logarithmo dato 0 . 9245306 reſpondent 8 $\frac{405}{1000}$ *fere*, ſeu 8 . 405.

II. Si logarithmus datus habet characteriſticam, qua major inter logarithmos tabularum non occurrit, ſeu maximam, logarithmis tabularum tuarum convenientem, Reſolutio.

1. Logarithmus dato proxime minor ſubtrahatur tum a proxime majore qui in tabulis occurrit, tum a logarithmo dato.

2. Fiat: Ut differentia prima ad ſecundam, ita 100 ad partes centeſimas, 1000 ad milleſimas inveniendas (§. 110

arith.), & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis reſpondet, addendas.

59. E. gr. Sit inveniendus numerus reſpondens logarithmo 3 . 9281563.

Logarith. prox. major	=	3. 9281909
minor	=	3. 9281397
Differentia prima	=	512
Logarithmus datus	=	3. 9281563
—— prox. minor	=	3. 9281397
Differentia ſecunda	=	166

512 : 166 = 100,
100
16600

512) 16600 (32.
1240
216

Quare cum numerus logarithmo proxime minori in tabulis reſpondens ſit 8475, erit numerus logarithmo dato reſpondens, ſeu quæſitus $8475\frac{32}{100}$.

Eodem modo pro logarithmis ſinuum & tangentium reperiuntur minuta ſecunda, ſi in gradibus & minutis primis acquieſcere non expedit. Exemplum occurret infra (§. 66).

Problema 60. *Invenire numerum reſpondentem logarithmo majori logarithmis omnibus in tabulis occurrentibus.*

1. A logarithmo dato ſubtrahatur logarithmus reſpondens articulo cuidam pri-

primario, 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, reſiduum ſit logarithmus minor maximo, qui eſt in tabulis.

2. Quæratur numerus conveniens logarithmo reſiduo (§ 58).

3. Numerus inventus multiplicetur per articulum primarium, cujus logarithmus a dato eſt ſubtractus vi num. 1.

Factum erit numerus quæſitus.

Numerus inventus eſt quotus qui ex diviſione per articulum primarium, & numerum dato logarithmo reſpondentem prodiret (§. 39). Enimvero ſi quotus multiplicatur per diviſorem, aut viciſſim, prodit dividendus (§. 47 *arith.*). Ergo factum commemoratum erit numerus quæſitus. Demonſtratio.

E. gr. Sit quærendus numerus reſpondens logarithmo 7.9281563; ſubtrahe logarithmum ultimum tabulæ, qui reſpondet articulo 10000, reſiduum erit 3.9281563. Quare cum huic logarithmo reſpondeat numerus $8475\frac{32}{100}$ (§. 59); ſi eum multiplicas per 10000 habebis 84753200, numerum quæſitum.

61. Logarithmi Sinibus & Tangentibus reſpondentes dicuntur etiam *Sinus* & *Tangentes artificiales*. *Neperus* logarithmos coſinuum *antilogarithmos*, tangentium logarithmos appellat *differentiales*, quos *Keplerus Meſologarithmos* vocat. Hæc ad alios autores intelligendos faciunt.

CA-

CAPUT III.

De Reſolutione Triangulorum.

Theorema. 62. *In quovis triangulo rectilineo latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum.*

Fig. 4. E. gr. in triangulo rectilineo ABC lateri AB opponitur angulus C, lateri BC opponitur angulus A, & lateri AC opponitur angulus B. Dico ergo Latus AB eſſe ad latus BC, ut eſt ſinus anguli C ad ſinum anguli A: item latus AB eſſe ad latus AC, ut eſt ſinus anguli C ad ſinum anguli B &c.

Demonſtratio. Cum tria puncta, in quibus latera trianguli rectilinei concurrunt, A, B, & C, non ſint ſita in eadem linea recta, per ea circulus deſcribi poteſt (§. 222 *Geom.*), adeoque triangulum rectilineum quodvis circulo poteſt inſcribi, ita ut latera trianguli ſingula ſint chordæ, ſinguli anguli ejusdem ſint anguli ad peripheriam: habebit ergo quilibet angulus pro menſura dimidium arcum cui inſiſtit, ita ut ſit menſura angulorum C $= \frac{1}{2}$ arc. AB, B $= \frac{1}{2}$ arc. AC, A $= \frac{1}{2}$ arc. BC. Enimvero $\frac{1}{2}$ latus AB eſt ſinus dimidii arcus AB, & anguli C (§. 2), $\frac{1}{2}$ latus BC eſt ſinus dimidii arcus BC, & anguli A; pariter $\frac{1}{2}$ latus AC eſt ſinus dimidii arcus AC, adeo-

adeoque & anguli B (§. *cit.*). Quare cum ſit latus AB ad latus BC, ut $\frac{1}{2}$ latus AB ad $\frac{1}{2}$ latus BC (§. 103 *arith.*); erit AB : BC = ſinus anguli C ad ſinum anguli A, &c. *per demonſtrata.* In quovis ergo triangulo rectilineo latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum.

63. *Dato latere* AB *trianguli* ABC, & *angulis duobus* A & C, *invenire latus* BC. Problema. Fig. 1.

Per theorema præcedens (§. 62), eſt: Reſolutio.

Ut Sinus anguli C
Ad latus oppoſitum AB
Ita ſinus anguli A
Ad latus oppoſitum BC.

Poteſt ergo latus BC inveniri vel per regulam trium, vel commodius per logarithmos (§. 43, 56).

64. E. gr. Sit latus AB = 38′, angulus C = $48^{\circ}\,25'$, A = $40^{\circ}\,35'$. Fiet

Log. Sin. C = 9. 8738965 — subtrahendo.
Log. Lat. AB = 1. 5797836 ⎤ add.
Log. Sin. A = 9. 8132829 ⎦
Sum̃a AB + A = 11. 3930665
Log. Lat. BC = 1. 5191700, cui in

tabulis reſpondent 33′, vel accuratius (§. 58 *num.* 1.) $33\,\frac{51}{100}$ fere, ſeu 3305^{14}.

65. *Datis duobus lateribus* AC & AB, *atque angulo* B *uni eorum* AC *oppoſito*, *invenire reliquos angulos* C & A.

Reſolutio. Quæritur primo angulus alteri datorum laterum AB oppoſitus (§. 62) dicendo:

Ut Latus AC
Ad Sinum anguli B,
Ita Latus AB
Ad Sinum anguli C.

E. gr.

66. E. gr. Sit latus AC 24', AB 48', B 18° 52'. adhibitis logarithmis fiet :

Log.	AC	=	1 . 3802112
Log. Sin.	B	=	9 . 5096956
Log.	AB	=	1 . 6812412
Summa		=	11 . 1909368
Log. Sin.	C	=	9 . 8107256, cui

reſpondent 40° 18' fere, vel accuratius (§. 58 *num.* 2, & §. 59)

Log. prox.	*major*	=	9 . 8107631
—— ——	*minor*	=	9 . 8106141
Differentia prima		=	1490

Log. Sin.	C	=	9 . 8107256
Log. prox.	*minor*	=	9 . 8106141
Differentia 2da		=	1115

Igitur dic : Differentia prima 1490 dat 60'' (Eſt enim differentia arcuum logarithmis tabulæ reſpondentium 1' ſeu 60''); quot minuta ſecunda dat differentia altera 1115. Fiat ergo

1490 : 1115 = 60''
60

```
        6690]0]44'' ſeu 45'' fere.
149)    730[0|
        134  [
```

Eſt ergo angulus C = 40° 17' 45'' fere.

67.

67. Invento angulo C, ex eo & dato B ſimul invenitur tertius A, per ſummæ C + B ſubtractionem ex 180°, ſeu ex 179° 59' 60".

68. Si datur angulus minori datorum laterum oppoſitus, angulus majori datorum oppoſitus poteſt non raro eſſe obtuſus. Unde ſpecies quoque anguli unius quæſitorum detur oportet, nempe ſitne obtuſus, an acutus. Quodſi obtuſus fuerit, ſumitur acuti inventi complementum ad 180° (§. 3, 4). Similiter ſi angulus datus fuerit obtuſus, ſumitur ſinus anguli acuti, qui cum dato facit ſummam 180°.

Problema. Fig. 5. 69. *Datis duobus lateribus* (AB & AC) *angulum rectum* (A) *intercipientibus*, *invenire angulos* (B & C) *trianguli rectanguli* BAC.

Reſolutio. 1. Sume AB ſeu BA pro radio ſeu Sinu toto, erit AC tangens anguli B (§. 6). Unde

2. Dic: *Ut* BA
Ad AC
Ita Sinus totus
Ad tangentem anguli B.

E. gr.

70. E. gr. Sit BA = 21, AC = 36; adhibitis logarithmis fiet:

Log. BA	=	1 . 3222193
Log. AC	=	1 . 5563025
Log. Sinus totius	=	10 . 0000000
Summa	=	11 . 5563025

Log. Tang. B = 10 . 2340832, cui

reſpondent 59° 44', vel accuratius (§. 58 num. 2, & §. 59) 59° 44' 26''.

71. *Si fuerint duæ quantitates homogeneæ inæquales, erit earum major æqualis ſemiſummæ & ſemidifferentiæ earundem ſimul ſumtis, minor æqualis erit ſemiſummæ ſemidifferentia mulctatæ.* Lemma.

E. gr. Sint duo numeri inæquales 9 & 5; erit eorum ſumma = 14, ſemiſumma = 7; differentia = 9 − 5 = 4, ſemidifferentia = 2. Erit major 9 = 7 + 2, minor 5 = 7 − 2.

Eſt enim major quantitas æqualis ſummæ ex minore & differentia (§. 27 *Arith.*). Unde ſumma ex majore & minore æqualis eſt minoribis ſummæ atque differentiæ, ſeu ſi major dicatur M, minor *m*, differentia *d*, erit major ſeu M = *m* + *d*, ſumma ex majore & minore, ſeu (M + *m*) = 2 *m* + *d*; Demonſtratio.

 adeo-

adeoque ſemiſumma erit $m + \frac{1}{2} d$. Enimvero ſi ad $m + \frac{1}{2} d$ additur ſemidifferentia ſeu $\frac{1}{2} d$, habes $m + \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d$, ſeu $m + d = M$; ſi autem ex ſemiſumma $m + \frac{1}{2} d$ ſubtrahis ſemidifferentiam $\frac{1}{2} d$, relinquitur m ſeu minor; ergo major æqualis eſt aggregato ex ſemiſumma & ſemidifferentia, minor autem ſemiſummæ ſemidifferentia mulctatæ. Q. e. d.

Coroll. 72. Quoniam ſemiſumma $= m + \frac{1}{2} d$ (§. 71). *Si a ſemiſumma auſertur quantitas minor, relinquitur ſemidifferentia.*

Problema. 73. *Datis duobus lateribus* AC & CB *trianguli* ABC *una cum angulo a lateribus datis intercepto* C, *invenire angulos reliquos* ABC & BAC.

Fig. 6.

Reſolutio. 1. Dic: Ut ſumma laterum AC & CB
Ad differentiam eorundem
ſeu AC — CB
Ita Tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum ABC & BAC,
Ad Tangentem ſemidifferentiæ eorundem angulorum.

2. Semidifferentiam inventam adde ſemiſummæ angulorum quæſitorum; & habes angulum ABC majorem, ſeu majori lateri AC oppoſitum. Eandem ſemidifferentiam ſubtrahe a ſemiſumma

com-

commemorata, & habes angulum BAC minorem ſeu minori lateri oppoſitum (§. 71).

74 E. gr. Sit latus AC = 85, CB = 23. C = 64° 37′. Fiet:

AC = 85	AC = 85	A + B + C = 179° 60′
CB = 23	CB = 23	C = 64 37
AC + CB = 108.	AC − CB = 62	A + B = 115 23.
		$\frac{1}{2}$(A + B) = 57° 41′ 30″

Log. AC + CB = 2 . 0334238
Log. AC − CB = 1 . 7923917
Log. Tang. $\frac{1}{2}$ (B + B) = 10 . 1990237 §56.

Summa = 11 . 9914154

Log. Tang, Semidiffer. ſeu *Log Tang.* $\frac{1}{2}$ A − B = 9 . 9579910,

cui reſpondent quam proxime 42° 14′.

$\frac{1}{2}$ (A + B) = 57° 41′ 30″
$\frac{1}{2}$ (A − B) = 42 14

Ang. ABC = 99° 55′ 30″

$\frac{1}{2}$ (A + B) = 57° 41′ 30″
$\frac{1}{2}$ (A − B) = 42 14

Ang. BAC = 15° 27′ 30″

Demonſtratio. Demonſtranda eſt analogia: Ut ſumma laterum AC+CB ad differentiam eorundem AC—CB = ita Tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum BAC & CBA, ad Tangentem ſemidifferentiæ eorundem angulorum.

I. Fiat CE = CB, & CD = CB, ducaturque BE; erit triangulum CEB æquicrurum (§. 71 *Geom.*) adeoque angulus CEB = CBE. Ex C tanquam centro per E, B & D duci poteſt Semicirculus (§. 126. 48 *Geom*). Erit ergo EBD angulus in Semicirculo, adeoque rectus (§. 201 *Geom.*), inſuper ob EC = CB, erit AE = AC — CB, & ob CD = CB, erit AD = AC+CB.

II. Ducatur rectæ EB parallela AF (§. 180 *Geom.*) & per puncta D & B ducatur recta DF; erit (§. 182 *Geom.*) angulus F = angulo EBD, & angulus FAD = BED, & DA : AE = DF : BF (§. 296 *Geom.*), atque angulus DFA = DBE ſeu EBD = recto *per demonſtrata num. I*; unde & DFA eſt rectus (§. 129 *Geom.*). Ergo DF tangens anguli FAD, & BF tangens anguli FAB (§. 6).

III. Porro angulus BCD eſt externus tum trianguli ABC tum trianguli EBC. Atqui in quovis triangulo angulus externus æqualis eſt duobus internis

oppo-

oppoſitis (§. 194 *Geom.*); ergo BCD = CBA + CAB = CEB + CBE = 2 CEB *per demonſtrata num.* 1; adeoque angulus BED = CEB = ſemiſummæ angulorum quæſitorum. Sed eſt BED = FAD *per demonſtrata num.* II. Ergo FAD = ſemiſummæ angulorum quæſitorum. Quare cum DF ſit tangens anguli FAD *per demonſtr. num.* II, DF eſt tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum.

IV. Præterea DAF eſt ſemiſumma angulorum quæſitorum *per demonſtr. num.* III, & BAC eſt angulus minor quæſitorum ſeu minori lateri BC oppoſitus in triangulo ABC *per hypotheſin.* Sed ſi a ſemiſumma aufertur quantitas minor, relinquitur ſemidifferentia (§. 72). Ergo DAF — BAC = FAB = ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum. Quare cum BF ſit tangens anguli FAB *per demonſtr. num.* II, erit BF tangens ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum.

V. Enimvero AD eſt ſumma laterum datorum, ſeu AD = AC + CB, AE eſt differentia laterum datorum, ſeu AE = AC — CB, *per demonſtr. num.* I. DF eſt tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum *per demonſtr. num.* III. BF eſt tangens ſemidifferentiæ angulo-

rum quæſitorum *per demonſtr. num.* IV. Atque eſt DA : AE = DF : BF *per demonſtr. num.* II. Ergo ſumma laterum eſt ad differentiam eorundem, ut tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem. Q. e. d.

Problema. Fig. 7. 75. *Datis tribus lateribus trianguli* ABC *invenire angulos.*

Reſolutio & Demonſtratio. 1. Latus minimum AB ſumitur pro radio, & ex A ceu centro radio AB deſcribitur circulus DBGF; erit ob AD = AB (§. 48. *Geom.*) DC = AC + AB, ſeu ſumma laterum AB & AC; & FC = AC — AF = AC — AB = differentiæ laterum. Tum dic;

2. Ut baſis BC

Ad ſummam laterum AB + AC = DC.

Ita laterum differentia FC = AC — AB.

Ad ſegmentum baſis GC.

3. Subtrahatur GC ex BC, ut relinquatur BG.

4. Demiſſa ex centro A perpendicularis AE dividit chordam BG in duas partes æquales (§. 210 *Geom.*).

5. Datis ergo lateribus BE, & BA, in triangulo ad E rectangulo BAE, inveniri poſſunt anguli ABE & EAB (§. 65); ſimiliter ex dato latere AC, & in-

invento EC = ½ BG + GC, inveniri poſſunt anguli C, & CAE (§. cit.). Additis ergo EAB & CAE habetur quoque angulus BAC.

Id unice demonſtrandum eſt eſſe BC ad DC = FC ad GC. Demonſtratio.

Ducantur rectæ FG & DB. Angulus *y* ſeu DBG, cum ſit ad peripheriam, habet pro menſura dimidium arcum DFG, cui inſiſtit; & angulus *x* itidem ad peripheriam, habet pro menſura dimidium arcum GBD (§. 199 *Geom.*). Quare cum arcus DFG + GBD totam circuli peripheriam abſolvant ſeu 360° (§. 42 *Geom.*), erunt ½ DFG + ½ GBD = 180°; & hinc *x* + *y* = 180°. Sed eſt etiam *x* + *o* = 180° (§. 130 *Geom.*). Ergo *y* = *o* (§. 29 *arith.*). Quare cum angulus C ſit communis triangulo DCB & △ FCG erit D = G (§. 191 *Geom.*). Unde porro BC : DC = FC : GC (§. 159 *Geom.*). Q. e. d.

76. E. gr. Sit BC = 93', AC = 72', AB = 38', fiet

$$\begin{array}{ll} AC = 72' & AC = 72' \\ AB = 38 & AB = 38 \\ \hline AC + AB = 110 & AC - AB = 34 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \textit{Log.} & BC = & 1\,.\,9684829 \\ \textit{Log.} & AC + AB = & 2\,.\,0413927 \\ \textit{Log.} & AC - AB = & 1\,.\,5314789 \\ \hline \textit{Summa} & & 3\,.\,5728716 \\ \hline \textit{Log.} & GC = & 1\,.\,6043887 \end{array}\right\}$$

cui in tabulis reſpondent proxime 40', vel ſi accuratius inquiras (§. 58 num. 1.) 4021''.

$$\begin{array}{ll} BC = 9300''' & EG = 26395'''' \\ GC = 4021''' & GC = 40210 \\ \hline BG = 5279''' & EC = 66605 \end{array}$$

$$BE = 26395''''$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \textit{Log.} & AB = & 4\,.\,5797836 \\ \textit{Log. Sin. tot.} & = & 10\,.\,0000000 \\ \textit{Log.} & BE = & 4\,.\,4215217 \\ \hline \textit{Summa} & & 14\,.\,4215217 \\ \hline \end{array}\right\}$$

Log. Sin. EAB = 9 . 8417381, cui in tabulis proxime reſpondet logarithmus anguli 44°. Unde angulus B erit 46°

Log.

Log. AC	$=$	4 . 8573325
Log. Sin. Tot.	$=$	10 . 0000000
Log. EC	$=$	4 . 8235068
Summa	$=$	14 . 8235068

Log. Sin. EAC $=$ 9 . 9661743, cui in tabulis proxime reſpondet logarithmus anguli $67^{\circ}\ 40'$, adeoque angulus C erit $= 22^{\circ}\ 20'$.

Igitur in triangulo BAC angulus A $= 111^{\circ}\ 40'$. B $= 45^{\circ}\ 53'$. C $= 22^{\circ}\ 20'$.

77. BE repertum fuit ſcrupulorum 26395, opoιtuit etiam ſumere in ſcrupulis reliquas lineas, ut GC $= 40210''$, AB $= 38000''$, & AC $= 72000''$. Unde poſteriorum logarithmi acquiſierunt characteriſticam 4 (§. 54, 55.). Si circumſtantiæ jubent accuratius inveſtigare quantitatem ſingulorum angulorum, minuta ſecunda inveniri poterant, ut ſupra (§. 65, 59).

CAPUT IV.

De uſu Trigonometriæ.

78. *Metiri altitudinem acceſſam AB.* Problema Fig. 8. Tab. I.

1. Metire diſtantiam DC (§. 33 Geom.)

2. Ope inſtrumenti metire angulum ADC (§. 60 Geom.).

3. Cum ad C ſit angulus rectus, ex angulo ADC reperitur CAD (§. 188 *Geom.*).

4. Quære rectam AC (§. 63), vel, ſi mavis, dic: ut radius ad tangentem anguli D, ita recta DC ad altitudinem CA.

5. Si objectum cum inſtrumento ſitum habet horizontalem, inventæ altitudini AC adde altitudinem inſtrumenti; & habes AB. Quodſi ſitus objecti & inſtrumenti non ſit horizontalis, pars altitudinis CB peculiariter quærenda eſt eodem modo, quo AC.

Problema. Fig. 9. Tab. I.

79. *Metiri altitudinem inacceſſam* CD.

1. Metire diſtantiam duarum ſtationum *d* & *f*.

2. In *f* metire angulum *o*, in *d* angulum *a*, cujus complementum ad 180 eſt *b*, (§. 130 *Geom.*).

3. Ex datis *o* & *b* invenitur *b*C*o* (§. 188 *Geom.*).

4. In triangulo *bo*C quære latus *b*C (§. 63).

5. Cum angulus CD*a* ſit rectus, & angulus *a* cognitus, invenies altitudinem CD (§. 63).

6. Addatur altitudini CD altitudo inſtrumenti *bd*, & habes altitudinem totam CG: vel ſi DG inæqualis eſt altitu-

titudini bd, quære porro, in triangulo CaD, etiam aD, & ope inſtrumenti præterea angulum DaG, atque hinc demum DG (§. 63.)

80. *Ex duabus feneſtris* o & u *metiri altitudinem turris* EF. Problema Fig. 10. Tab. I.

1. Bolide, ſeu ſilo, ex quo plumbum eſt ſuſpenſum, metire diſtantiam liminis feneſtræ ſuperioris u a limine inferioris o, itemque hujus diſtantiam a pavimento og. Reſolutio.

2. In ſuperiore feneſtra metire angulum u, in inferiore angulum o.

3. Angulo u adde 90°, & habes angulum Euo; angulum o ſubtrahe a 90°, & habes angulum Eou.

4. Adde Euo & Eou, & ſummam ſubtrahe a 180°, erit reſiduum angulus oEu (§. 188 *Geom.*).

5. Quære in triangulo oEu latus oE (§. 63).

6. Et in triangulo Eio latus Ei (§. *cit.*).

7. Adde ad Ei diſtantiam feneſtræ inferioris a pavimento og; & habebis altitudinem EF quæſitam.

81. *Metiri diſtantiam arborum* G & H, *ad quas ex* M *acceſſus patet.* Problema Fig. 11.

Reſolutio. 1. Metire lineas MG & MH (§. 33 Geom.), atque angulum M (§. 60 Geom.).

2. Ex his quære angulum H (§. 73), & demum GH diſtantiam arborum (§. 63).

Problema 82. *Metiri diſtantiam duorum locorum* Fig. 12. I & L, *ad quorum unum* I *duntaxat acceſſus patet ex* o.

Reſolutio. 1. Metire rectam Io, & angulos I & o (§. 33, 60 Geom.).

2. Subtrahe I & o ex 180°, relinquitur L (§. 188 Geom.). Hinc

3. Quære rectam IL (§. 63). Q. e. f.

Problema 83. *Metiri diſtantiam duorum locorum* Fig. 13. M & N *inacceſſorum.*

Reſolutio. 1. Elige tres ſtationes *a*, *c*, *b*, in eadem recta; & metire lineas *ac* & *cb*.

2. Metire angulos *a* & M*ca*, atque ex horum ſumma quære angulum *a*M*c* (§. 188 Geom.); atque hinc quære latus M*c* (§. 63).

3. Metire angulos N*cb*, & *b*, atque ex eorum ſumma quære angulum *c*N*b* (§. cit. Geom.); & inde porro latus N*c* (§. 63).

4. Summam angulorum M*ca* & N*cb* ſubtrahe ex 180°, & habes angulum M*c*N (§.

(§. cit. Geom.); hinc quære angulum cNM (§. 73); atque inde tandem diſtantiam MN (§. 63).

84. *Data altitudine* BE *arcus* DBF, *& dimidia chorda* DE, *invenire quantitatem arcus* DBF *in gradibus*. Problema Fig. 2.

1. Ex BE & DE quære diametrum BG, & hinc radium BC (§. 309 *Geom.*). Reſolutio.

2. Cum in triangulo DEC ad E rectangulo nota ſint latera DC & DE, quære hinc angulum C (§. 65).

3. Quare cum arcus DB ſit menſura anguli DCB (§. 58 *Geom.*) & dimidium arcus DBF (§. 216 *Geom.*); duplum anguli inventi C dabit quantitatem arcus DBF in gradibus.

85. Problema hoc uſui eſt ad ſegmentum circuli accuratius & abſque ſubſidio inſtrumenti transportatorii inveniendum (§. 311 *Geom.*).

86. *Invenire rationem diametri ad peripheriam circuli.* Problema. Fig. 14.

Cum poſito radio = 1000000 tam ſinus AB quam tangens ED, qui reſpondent arcui AD unius minuti primi, ſit fere 2909, ut ex tabulis ſinuum & tangentium liquet; arcus ipſe AD cenſeri poteſt = 2909. Enimvero minuta omnia totius peripheriæ ſunt 360. 60 = 21600. Quare ſi 2909 multipli- Reſolutio & Demonſtratio.

pas

ca per 21600, productum 62834400 dabit peripheriam in ejusmodi particulis, quales habet radius 10000000, diameter 20000000. Eſt ergo diameter ad peripheriam, ut 20000000 ad 62834400, ſeu dividendo utriusque rationis terminum per 200000, ut 100 ad 314 fere.

Theorem. Tab. I. Fig. 2. 87. *Si arcus* BD *fuerit* 45°, *ejus tangens* BA *æqualis erit radio* BC.

Demonſtratio. Si enim arcus BD eſt 45°, erit quoque angulus BCD, cujus menſura eſt arcus BD, æqualis 45° (§. 58 *Geom.*). Quare cum angulus ad B ſit rectus (§. 6) adeoque 90° (§. 127 *Geom.*), erit angulus A quoque 45° (§. 188 *Geom.*). Ergo BA = BC (§. 196 *Geom.*). Q. e. d.

Finis Trigonometriæ.

AL-

ALGEBRA.

CAPUT I.

De calculo literali.

1. ALgebra dicitur ſcientia inveniendi quantitates incognitas ope æquationum. Definitio.

2. *Quantitatum* nomine intelligitur quidquid augeri vel minui poteſt, ut numerus quicunque, vel magnitudo quæcunque rerum ſive corporearum ſive incorporearum. Definitio.

3. *Æquatio* autem eſt expreſſio ejuſdem quantitatis per duos valores diverſos ſed æquales. Definitio.

4. E. gr. Si 12 exprimitur tam per $7 + 5$ quam per $3 \cdot 4$, erit $7 + 5 = 3 \cdot 4$ æquatio; nam 12 æquivalet 7 & 5 ſimul ſumtis, æquivalet quoque facto ex 3 in 4.

Definitio. 5. *Arithmetica ſpecioſa* ſeu *calculus literalis* appellatur, qui ad exercendas operationes arithmeticas literis alphabethi utitur inſtar notarum arabicarum, quas arithmetica vulgaris adhibet.

6. Calculus literalis notas uſitatas 1, 2, 3, 4 &c. non excludit penitus, ſed earum uſum ſæpiſſime uſui literarum conjungit. Unde ſcribimus $3a$, ſi quantitas per a deſignata ter ſumenda eſt. Quodſi literis nullus præfigitur numerus, ſemper iis intelligitur præfixa unitas. Sic a eſt idem ac $1a$; & ab idem ſignificat quod $1ab$.

7. Vix mirabitur electas eſſe alphabethi literas ad deſignandas quantitates, qui meminerit, Romanos, Græcos, Hebræos non aliter al ſi literis ſui alphabethi indicaſſe numeros. In arithmetica ſpecioſa alia tamen eſt literarum ſignificatio; neque enim certos ſeu determinatos numeros deſignant literæ, ſed numeros indeterminatos, ſeu quantitates, quæ aliis aliiſque numeris determinatis exprimi poſſunt, pro alia aliaque unitate aſſumta. E. gr. ſi a deſignet lineam, lineæ in partes modo tres, modo quatuor, modo 9 &c. dividi poteſt, & in caſu primo pro unitate aſſumi pars tertia, in altero pars quarta, in tertio pars nona: eritque in caſu primo $a = 3$, in altero $a = 4$, in caſu tertio $a = 9$.

8. Quo-

8. Quoniam nihil inveniri poteſt, niſi ex quibusdam datis, quæ ad quæſita relationem quandam cognitam habent, algebra, quæ eſt ars inveniendi quantitates, quædam eſſe data ſumit. Quare cum porro ad inveniendum conducat, data à quæſitis probe diſcernere, ut diſcrimen hoc fiat manifeſtius, *data primis alphabethi literis*, a, b, c, d *&c. quæſita poſtremis* x, y, z *&c. denotantur*. Hypoth.

9. Operationum arithmeticarum ſigna retinentur eadem, quæ in arithmetica ſunt commemorata (§. 15, 28, 35, 44 *arith.*), hæc tamen præterea commemoratis ſunt adjicienda. Hypoth.

10. *Multiplicatio* ſæpiſſime fit literis nullo ſigno interjecto conjunctis. E. gr. ſi *a* multiplicari debet per *n*, ſcribitur factum *na*: ſi *a* multiplicandum per *b*, erit factum *ab*. Si *a*, *b*, & *c* ſunt invicem multiplicanda, ſcribitur factum *abc*. Hypoth.

11. Si quantitates plures per unam multiplicandæ ſunt, illæ includuntur parentheſi ( ); hæc autem præponitur vel poſtponitur. E. gr. Si *a* + *b* — *c* multiplicari debent per *d*, ſcribitur (*a* + *b* — *c*) *d*, vel *d* (a + b — c). Si *a* + *c* multiplicari debet per *b* — *d*, ſcribitur (*a* + c) (*b* — *d*). Hypoth.

12. In commentariis Academiæ regiæ ſcientiarum pariſinæ, & apud alios quosdam ſcriberetur $\overline{a+b-c} \times d$, vel $d \times \overline{a+b-c}$ &c.

Hypoth. 13. Si quantitas una plures alias, vel plures aliæ unam dividunt, plures illæ includuntur parentheſi ( ) ut in multiplicatione. E. gr. Si $a+b-c$ dividi debet per d, ſcribitur $(a+b-c):d$. Si a dividi debet per $b-d$, ſcribitur $a:(b-d)$. Si $a+c$ dividi debet per $b-d$ ſcribitur $(a+c):(b-d)$ &c.

14. Sæpe ſcribitur $\frac{a+b-c}{d}$, $\frac{a}{b-d}$, $\frac{a+c}{b-d}$ vel etiam $\overline{a+b-c}:d$, $a:\overline{b-d}$, $\overline{a+c}:\overline{b-d}$.

15. Illud præterea notandum, quotieſcunque literis nullum præfigitur ſignum (ut fit initio lineæ, vel ſi ſolæ ponuntur) ſemper ſubintelligi ſignum $+$, quod etiam *poſitivum* appellatur. Sic a idem eſt ac $+a$.

16. Signo poſitivo opponitur *privativum* ſeu *negativum* $-$. Unde $+$ & $-$, vel $-$ & $+$ dicuntur *ſigna contraria*. *Signa* vera *eadem* dicuntur $+$ & $+$, item $-$ & $-$.

Problema. 17. *Quantitates iisdem vel diverſis ſignis affectas addere.*

Reſolutio. 1. Quantitates iisdem literis indicatæ ſcribuntur ſub ſe invicem.

2.

2. Si ſigna literis præfixa ſunt eadem, additio fit ut in numeris vulgaribus.

3. Si ſigna literis præfixa ſunt contraria, additio mutatur in ſubtractionem, & reſiduo præfigitur ſignum majoris quantitatis.

4. Si quantitates literis diverſis indicatæ ſunt addendæ, ſolo ſigno additionis junguntur, ut $3a + 2b$. Quodſi ſigna eorum ſint diverſa, ut $3a$ & $-2b$, ſignis non mutatis junguntur & fit $3a - 2b$.

$$\begin{array}{llllll} \text{E. gr.} & 3a & + 2b & - 4c & - 5d & + 2e \\ & a & - 5b & + 3c & + 6d & - 2e \\ \hline & 4a & - 3b & - c & + d & \end{array}$$

Quantitates iiſdem literis indicatæ ſunt homogeneæ; quodſi igitur & ſigna iis præfixa ſunt eadem; additio earum utique alia non erit, quam numerorum homogeneorum vulgarium. Demonſtratio.

Si ſigna præfixa ſunt contraria, ut ut literæ ſint eædem, quod ponitur per ſignum +, tollitur ſeu negatur per ſignum −, aut viciſſim; compenſatis ergo negativis per poſitiva, aut viciſſim, non niſi exceſſus alteriusutrius relinquitur. Unde additionis loco fit ſubtractio, & reſiduo ſignum majoris ſive excedentis præfigitur.

Si & literæ ſunt diverſæ, & ſigna contraria, quantitati uni jungendus eſt defectus alterius, non ergo mirum ſignum hujus negativum retineri.

18. Commode quantitates ſignis poſitivis affectæ habentur pro parata pecunia, affectæ ſigno negativo pro debitis, e. gr. ut + 9 a denotet 9 florenos, quos quis habet, — 7 a denotet 7 florenos, quos debet. Compenſato ſeu ſoluto debito 7 florenorum relinquuntur eidem 2 floreni, utpote exceſſus pecuniæ paratæ ſupra debitum. Idem apparet in quibuscunque rebus aliis oppoſitis.

Theorema. 19. *In ſubtractione quantitatum ſigna quantitatis ſubtrahendæ mutantur in contraria.*

Demonſtratio. Si *b* ſubtrahendum ex *a*, fieri *a* — *b*, adeoque ſignum +, quod literæ *b* præfixum intelligitur, mutari in contrarium, notum eſt (§. 28. *arith.*).

Si — *b* ſubtrahendum ex *a*, ſubtrahendus eſt defectus ipſius *b*. Enimvero defectus ipſius *b* non tollitur niſi ponendo ipſum *b*. Ergo ſi — *b* ſubtrahitur ex *a*, fit *a* + *b*. Denuo igitur ſignum quantitatis ſubtrahendæ mutatur in contrarium.

Eodem modo intelligitur, ſi *b* ſubtrahitur ex — *a* fieri — *a* — *b*; ſi vero — *b* ſubtrahitur ex — *a*, fieri — *a* + *b*.

Por-

Porro ſi $c + d$ ſubtrahitur ex $a + b$, fieri $a + b - c - d$, conſtat (§. 28 *arith.*).

Si $c - d$ ſubtrahitur ex $a + b$, ubi c integrum ſubtrahitur plus juſto ſubtrahitur; ſubtrahendum enim erat duntaxat c minus d (§. *cit.*). Quod ergo plus juſto fuerat ſubtractum, rurſus eſt addendum. Unde fit $a + b - c + d$. Rurſus ergo ſignum cujuslibet quantitatis ſubtrahendæ mutatur in contrarium.

Si ex $a + b$ ſubtrahitur $- c + d$, defectus ipſius c eſt tollendus, d autem ipſum ſubtrahendum eſt. Unde rurſus ſigna mutantur in contraria, fitque $a + b + c - d$.

Si ex $a + b$ ſubtrahitur $- c - d$, uterque defectus eſt tollendus, adeoque fit $a + b + c + d$.

Denique ſi ex $a + b$ ſubtrahitur $- a - b$, pariter fit $a + b + a + b$, hoc eſt $2a + 2b$. Si $a - b$ ſubtrahitur ex $a + b$, fit $a + b - a + b$, hoc eſt $2b$.

20. *Quantitates iisdem vel diverſis ſignis affectas a ſe invicem ſubtrahere.* Problema.

1. *Si ſigna ſunt eadem, & minor quantitas ſubtrahenda eſt a majore*, ſubtractio fit ut in numeris vulgaribus (§. 30 *arith.*). Reſolutio.

2. Si ſigna ſunt eadem, ſed major quantitas ſubtrahenda proponitur a minore; ſubtrahitur minor a majore & reſiduo præfigitur ſignum contrarium.

3. *Si ſigna ſunt contraria*, ſubtractio mutatur in additionem, & ſummæ præfigitur ſignum quantitatis minuendæ.

E. gr. Sit quantitas

Minuenda	$6a - 5b + 4c - 3d + 2e - f$
Subtrahenda	$a - 7b + 6c + 5d - 4e - 3f$
erit reſiduum	$5a + 2b - 2c - 8d + 6e + 2f$

Demonſtratio. Ratio omnium patet ex theoremate præmiſſo (§. 19). Unde alii ſic præcipiunt:

Reſolutio alia. 1. Signa omnia quantitatis ſubtrahendæ mutentur in contraria.

2. Tum addatur ſubtrahenda minuendæ.

E. gr.

$$\begin{array}{r} 1 + 0 - 1 - 2 - 3 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ \hline 0 - 1 - 2 - 3 - 4 \end{array}$$

Exemplum hoc probe notaſſe proderit ſuo loco (§. 39).

Problema 21. *Quantitates iisdem vel diverſis ſignis affectas multiplicare.*

Reſolutio. 1. Multiplicatio fit ut in numeris vulgaribus.

2. Si-

2. Signa multiplicantis & multiplicandæ quantitatis quoties ſunt eadem, toties facto præfigitur ſignum poſitivum $+$; quoties vero ſigna earum ſunt contraria, toties factum afficitur ſigno negativo $-$.

E. gr. Multiplicari debeat $3a - 2b + 4c$ per $2a - 3b$, fiet

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + 4c \\ 2a - 3b \\ \hline -9ab + 6bb - 12bc \\ 6aa - 4ab + 8ac \qquad\qquad \\ \hline 6aa - 13ab + 8ac + 6bb - 12bc. \end{array}$$

Si $+$ multiplicatur per $+$, factum eſſe poſitivum nemo negaverit. Si -3 e. gr. multiplicatur per $+5$, defectus ſeu debitum -3 toties ſumitur, quoties $+5$ continet unitatem, adeoque naſcetur privativum -15. Cum perinde ſit, quo ordine duo factores per ſe invicem multiplicentur (nempe ſive dicas ter 6, ſive ſexies 3, factum ſemper erit 18), factum quoque erit privativum e. g -15, ſi poſitivum multiplicari debet per privativum e. gr. $+5$ per -3. Ex eadem ratione ſi $9 - 3$ multiplicandum per -3, perinde eſt ac ſi -3 multiplicaretur per $9 - 3$. Atqui tum defectus $-$ Demonſtratio.

3 toties eſt ſumendus quoties 9 — 3, id eſt, 6 continet unitatem, adeoque ſexies. Enimvero ſi — 3 multiplicas per 9, defectum — 3 ſumis novies, adeoque ter juſto amplius; oportet ergo, ut defectum — 3, iterum ter tollas ex defectu — 3 novies ſumto, ſeu ex — 27. Quod cum aliter fieri nequeat, niſi ter addendo oppoſitum defectus — 3, ſive addendo ter + 3, erit factum ex 9 — 3 in — 3 = — 27 + 9. Quando ergo 9 — 3 multiplicatur per — 3, fiet

$$\begin{array}{r} 9 - 3 \\ - 3 \\ \hline -27 + 9 \end{array}$$

adeoque ſi privativum — 3 multiplicas per privativum — 3, facto præfigendum eſt ſignum poſitivum +.

Corollar. 22. Si factum dividis per factorem unum, quotus eſt alter ex factoribus (§. 108 *arith.*). Sed ſi — *a* multiplicatur per + *b*, factum eſt — *ab* (§. 21). Ergo ſi — *ab* dividis per — *a*, quotus eſt + *b*. Si vero — *ab* dividis per *b*, quotus eſt — *a* (§. *cit.*). Similiter ſi — *a* multiplicas per — *b*, factum eſt + *ab* (§. 21). Ergo ſi *ab* dividis per — *a*, quotus eſt — *b*; vel ſi *ab* dividis per — *b*, quotus eſt — *a* (§. 108 *arith.*). Pariter cum factum ſit *ab*,

ſi

ſi *a* multiplicatur per *b* (§. 21), adeoque quotus *a*, ſi *ab* dividitur per *b*, vel quotus ſit *b*, ſi *ab* dividitur per *a* (§. 108 *arith.*). Univerſim in diviſione locum habet regula eadem, quæ in multiplicatione, nempe *Eadem ſigna dant poſitivum, contraria dant privativum.*

23. Nempe ſi tam diviſori quam dividendo præfixum eſt ſignum idem, ſive poſitivum, ſive privativum, quotus ſignum habebit poſitivum; ſi vero diviſor & dividendus ſigna habuerint contraria, quoto ſignum privativum eſt præfigendum.

24. *Quantitates iisdem vel diverſis ſignis affectas dividere.* Problema.

Diviſio inſtituitur, ut in numeris vulgaribus (§. 41, 42), niſi quod perinde ſit, quodnam dividendi membrum cum diviſore comparatum ſuppeditet quotum; (neque enim literæ æque ut numeri valorem a loco hauriunt) & exacte ſervanda ſit regula: *Eadem ſigna dant* +, *contraria* — in quoto (§. 22). Resolutio.

Quodſi diviſio re ipſa non ſuccedit, diviſio duntaxat indicatur (§. 9, 13, 14).

25. Si quoti inveniendi cauſſa diviſor comparatur cum dividendo, menti obverſari ſemper debet theorema: *Si factum dividitur per factorum unum, quotus erit alter ex factoribus.* Unde multo facilius diviſionem abſolvet, qui ante fuerit in multiplicando probe verſatus.

Imo facta per multiplicationem inventa facillima præbent diviſionis exempla. Ab his ergo tirones dividendi initium ſument.

26. E. gr. Sit $aaa + 3aab + 3abb + bbb$ dividendum per $a + b$, fiet

$$
\begin{array}{r|l}
a+b) & aaa + 3aab + 3abb + bbb \quad (aa + 2ab + bb \\
 & \underline{aaa + aab} \\
 & 2aab + 3abb + bbb \\
 & \underline{2aab + 2abb} \\
 & abb + bbb \\
 & \underline{abb + bbb} \\
 & 0
\end{array}
$$

Similiter ſi $aa - bb - ac + bc$ dividendum eſt per $a - b$, fiet

$$
\begin{array}{r|l}
a-b) & aa - bb - ac + bc \quad (a + b - c \\
 & \underline{aa - ab} \\
 & ab - bb - ac + bc \\
 & \underline{ab - bb} \\
 & - ac + bc \\
 & \underline{- ac + bc} \\
 & 0
\end{array}
$$

Si cui hæc non ſatis explicata videntur, conſulat Tirocinium arithmeticum §. 223. Quo etiam ſubſidio juvari poterit is, cui in reſolutione problematum ſequentis capitis aqua hæret ob brevitatem, quam in calculo literali & applicanda regula Algebræ non nunquam ſectatus ſum.

27. Fractionum reductio ad minores terminos, aut ad eandem denominationem; earun-

dem additio, ſubtractio, multiplicatio & diviſio iiſdem prorſus regulis dirigitur, quas dedit arithmetica (§. 50 & ſeqq.), ut exemplis docui in Tirocinio arithmetico (§. 316).

28. Si quantitas (*a*) multiplicatur per ſe ipſam, factum (*aa*) dicitur *Dignitas*, *Potentia* vel *Poteſtas ſecunda*; ipſa autem quantitas (*a*) appellatur *Dignitas prima*, ſeu *Radix*. Si quantitas (*a*) bis multiplicatur per ſe ipſam, factum (*aaa*) appellatur *Dignitas tertia*; ſi ter, ducitur in ſe ipſam, factum *aaaa* appellatur *Dignitas quarta*; ſi quater, *Dignitas* ſeu *potentia quinta*, ut *aaaaa*. Definitio.

29. Dignitas nempe nomen ſeu numerum ſuum obtinet a numero indicante quoties radix ponatur, dum dignitas per multiplicationem gignitur.

30. Numerus, qui indicat, quoties radix ponatur, dum dignitas per multiplicationem gignitur, appellatur *Exponens dignitatis ſeu potentiæ*. Definitio.

31. Sic 1 eſt exponens dignitatis primæ ſeu radicis, 2 exponens dignitatis ſecundæ ſeu Quadrati, 3 exponens dignitatis tertiæ ſeu Cubi, 4 exponens dignitatis quartæ ſeu Biquadrati &c.

32. Exponens radici a dextris jungi ſolet ad exprimendam compendio dignitatem. Sic ſi radix eſt *a*, pro *aa* ſcribimus a^2, pro *aaa* fit a^3, pro *aaaa* fit a^4 &c. Si radix eſt *b*, pro *bb*

ſcri-

ſcribimus b^2, pro bbb fit b^3, pro $bbbb$ fit b^4 &c.

33. Si gradus ſeu quantitas dignitatis non determinatur, ſed vel major vel minor eſſe poteſt, indicatur per literam radici a dextris adſcriptam. Sic a^m vel a^n indicat dignitatem quamlibet radicis a.

Coroll. 1. 34. Exponentes dignitatum in progreſſione arithmetica (§. 20 *Trigonom.*) dignitates ipſæ in progreſſione geometrica creſcunt (§. 26 *Trigon.*); illi ergo harum ſunt logarithmi (§. 27 *Trig.*).

Clarius id patebit, ſi progreſſiones ſequentes contemplaberis

1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
0	1	2	3	4	5	6

Nempe $1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3$ &c.

Coroll. 2. 35. Logarithmus dignitatis cujuscunque eſt logarithmus radicis in exponentem dignitatis ductus (§. 30. & ſeqq. *Trigon.*). Unde ſi logarithmus radicis dicitur lr, erit logarithmus quadrati $2lr$, cubi $3lr$ &c.

Problema. 36. *Dignitatem quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

Reſolutio. 1. *Si multiplicandum eſt*, addantur exponentes, ſumma eſt exponens facti.

E. gr.

E. gr. a^{3} a^{5} a^{m} a^{r}
a^{2} a^{4} a^{n} a^{r}

a^{5} a^{9} a^{m+n} a^{2r}

2. *Si dividendum eſt*, exponens dignitatis dividentis ſubtrahatur ab exponente dividendæ, reſiduum erit exponens quoti.

E. gr. $\frac{a^{7}}{a^{3}} \mid a^{4}$ $\quad \frac{a^{m+n}}{a^{n}} \mid a^{m}$

$\frac{a^{m} \frown c^{n}}{a^{r} \frown c^{s}} \mid a^{m-r}\ c^{n-s}$

Cum exponentes ſint dignitatum logarithmi, ita quidem, ut logarithmus unitatis ſit o (§. 34); ſumma exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo multiplicantes, erit exponens facti (§. 30 *Trigon.*); differentia vero exponentium, quos habent dignitates ſeſe dividentes, erit exponens quoti (§. 39 *Trigon.*). Q. e. d. Demonſtratio.

37. Colligitur hinc eſſe $a^{0} = 1$. Coroll. 2. Cum enim ſit $a^{1} : a^{1} = a^{0}$ (§. 36), & $a^{1} : a^{1} = a : a$ (§. 32) $= 1$ (§. 42 *arith.*); erit $a^{0} = 1$ (§. 16 *arith.*).

Coroll. 2. 38. Hinc porro intelligitur eſſe $\frac{x}{n} = n^{-1}x$. Nam $\frac{x}{n} = \frac{1x}{n}$ (§. 6) $= \frac{1}{n} \cdot x$ (§. 61 *arith.*). Eſt præterea $n^0 = 1$ (§. 37) & $n^1 = n$ (§. 31). Unde $\frac{1}{n} = \frac{n^0}{n^1}$ (§. 45 *arith.*). Sed $\frac{n^0}{n^1} = n^{-1}$ (§. 36, 20). Ergo $\frac{1}{n} = n^{-1}$. Igitur etiam $\frac{1 \cdot x}{n} = n^{-1}x$ (§. 36 *arith.*). Quare & $\frac{x}{n} = n^{-1}x$ (§. 16 *arith.*).

Non erit inutile, ſi progreſſioni geometricæ dignitatum ipſius n ſubſcribas progreſſionem arithmeticam continua unitatis ſubtractione (§. 20) prognatam, ita tamen ut o ſit logarithmus ſeu exponens unitatis.

$$nnnn \quad nnn \quad nn \quad n \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{nn} \quad \frac{1}{nnn} \text{ \&c.}$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

Un-

Uſus compendio (§. 32.) commendato dignitates ipſius *n* ſic deſcribes:

$$n^4\ n^3\ n^2\ n^1\ 1^0\ n^{-1}\ n^{-2}\ n^{-3}$$ (§. 38).

CAPUT II.

De uſu calculi literalis in inveniendo.

39. Si *radix* dignitatis ſeu potentiæ cujusdam duabus partibus conſtat, *binomia* appellatur; ſi tribus, *trinomia*; ſi quatuor, *quadrinomia*; ſi pluribus quam duabus, vocatur univerſim *polynomia*. Definitio.

40. E. gr. Si radix dignitatis quantæcunque fuerit $a + b$, vel $a - b$, appellatur *binomia*; ſi radix fuerit $a + b + c$ vel $a - b + c$ vel $a + b - c$, *trinomia* dicitur.

41. *Determinationes quadrati radicis binomiæ invenire.*

Cum quadratum quodlibet determinetur multiplicando radicem per ſe ipſam (§. 67 *arith.*), multiplicetur radix binomia e. gr. $a + b$ per ſe ipſam; factum oſtendet determinationes quadrati, ſeu quibus poſitis quadratum radicis binomiæ ponatur; vel, ſi mavis, ex quibus partibus quadratum hoc componatur. Fiat igitur Reſolutio.

$a +$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \qquad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Theorema. *Quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis ſingularum partium* a *&* b, *& ex duplo partis primæ* 2a *in ſecundam* b *ducto.*

42. Formula $a^2 + 2ab + b^2$ ſuppeditat regulas extrahendi radicem quadratam, facitque ne earum facile obliviſcamur, aut ſi forſan oblivioni eas dedimus; ejus ope in memoriam facillime reducuntur. Aliæ utilitates infra occurrent. Id interea ſtudeo tironibus, ut in pluribus exemplis intueri conentur veritatem theorematis modo allati (§. 41), inveſtigando quadrata plurium ac diverſarum radicum binomiarum, e. gr. radicum $x + \frac{1}{2}a$ vel $x - \frac{1}{2}a$ aut $\frac{1}{2}a - x$.

Problema. 43. *Invenire determinationes cubi radicis binomiæ.*

Reſolutio. Non opus eſt, niſi ut quadratum ſeu dignitas ſecunda multiplicetur per radicem (§. 28, vel §. 68 *arith.*).

Fit

Fit ergo
$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2 b + ab^2 \quad\quad \\ \hline \text{Cubus} = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Dignitas tertia ſeu cubus radicis binomiæ componitur 1 ex cubis ſingularum partium ($a^3 + b^3$), 2. ex triplo quadrato partis primæ in ſecundam ducto ($3a^2 b$), & 3. ex triplo quadrato partis ſecundæ in partem primam ($3ab^2$). Theorema.

44. Facillime igitur calculo literali reperitur, quod operoſius multo quæſitum eſt in arithmetica (§. 82, 83 *arith*). Ex hoc theoremate derivantur regulæ extrahendi radicem cubicam, quas, ſi forte eas oblivioni dederis, nullo labore ope calculi literalis in memoriam revocabis.

45. *Invenire quantitatem rectanguli ex ſumma duarum quantitatum* (e. gr. linearum) *in quantitatem majorem vel minorem.* Problema.

Dicatur quantitas major Q, minor q, erit earum ſumma $Q + q$. Hinc Reſolutio.

$$\begin{array}{r} Q + q \\ Q \\ \hline Q^2 + Qq \end{array} \qquad \begin{array}{r} Q + q \\ q \\ \hline Qq + q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum quantitatum in majorem, æquatur Quadrato quantitatis majoris & rectangulo ex quantitate una in alteram. Rectangulum vero ex ſumma in minorem æquatur quadrato minoris & rurſus rectangulo ex quantitate una in alteram.

Corollar. 46. Si addantur $Q^2 + Qq + Qq + q^2$, prodit $Q^2 + 2Qq + q^2$ quadratum radicis binomiæ $Q + q$ (§. 51); ſeu quadratum ſummæ duarum quantitatum. Unde rectangula ex toto in partes ſingulas duarum ſimul ſumta æqualia ſunt quadrato totius.

47. *Exempli gratia.* Si numerus aliquis fuerit in duas partes quaſcunque diviſus, facta ex toto numero in partes ſingulas ſimul ſumta æquant quadratum totius. Si linea quædam fuerit in duas partes diviſa, rectangula ex tota in partes ſingulas ſimul ſumta æquant quadratum totius lineæ.

Problema 48. *Invenire quantitatem rectanguli ex ſumma duarum quantitatum in differentiam earundem.*

Sit

Sit, ut ante Q quantitas major, q minor. Erit $Q - q$ differentia quantitatum; & hinc Reſolutio.

$$\begin{array}{r} Q + q \\ Q - q \\ \hline -Qq - q^2 \\ Q^2 + Qq \\ \hline Q^2 - q^2. \end{array}$$

Rectangulum ex ſumma duarum quantitatum in differentiam earundem æqualis eſt differentiæ quadratorum illarum quantitatem. Theorema.

49. Quodſi ergo $a + b$ fuerit multiplicandum per $a - b$; factum erit $a^2 - b^2$. En, multiplicationis compendium. Si baſis cujusdam rectanguli conſtat duabus lineis inæqualibus in directum jacentibus, altitudo vero ejus ſit differentia illarum linearum, rectanguli area æqualis erit exceſſui, quem habet quadratum lineæ majoris ſupra quadratum minoris.

50. *Invenire ſummam terminorum primi & ultimi progreſſionis arithmeticæ.* Problema

Sit terminus primus a, differentia terminorum d, erit progreſſio (§. 20 *Trigon.*), ſi numerus terminorum par Reſolutio

$$\begin{array}{lcccccc} & a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d \\ & & & & a+2d & a+d & a \\ \hline \textit{Summæ} & & & & 2a+5d & 2a+5d & 2a+5d \end{array}$$

Theorema. In progreſſione arithmetica ſumma terminorum primi & ultimi æquatur ſummæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æquidiſtantium.

Si numerus terminorum impar, erit

a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$
	$a+3d$	$a+2d$		a
	$2a+4d$	$2a+4d$		$2a+4d$

Theorema. In progreſſione arithmetica ſumma terminorum primi & ultimi æqualis eſt medii duplo; ſi numerus terminorum impar.

E. gr.	1	3	5	7	9	11
				5	3	1
Summæ				12 =	12 =	12
	1	3	5	7	9	
			5	3	1	
			10 =	10 =	10.	

Coroll. 1. 51. Summa igitur totius progreſſionis arithmeticæ eſt factum ex ſumma termini primi & ultimi in dimidium terminorum numerum (§. 33 *arith.*); vel, ſi mavis, quotus qui prodit, ſi factum ex ſumma termini primi & ultimi in numerum terminorum dividitur per 2.

52. Si in progreſſione arithmetica terminus primus a, univerſim autem ſunt termini ſex, terminus ultimus eſt $a + 5d$; ſi termini univerſim ſunt quinque, terminus ultimus eſt $a + 4d$ (§. 50). Quodſi ergo terminorum numerus dicatur n, terminus primus a, differentia terminorum d, erit terminus ultimus $a + (n - 1) d$. Coroll. 2.

53. Hinc ſi datur terminus progreſſionis arithmeticæ primus, terminorum differentia, & eorundem numerus, inveniri poteſt ſumma totius progreſſionis arithmeticæ. (§. 51, 52). Coroll. 3.

54. E. gr. Sit terminus primus 1, differentia terminorum 2, eorum numerus 6, erit ultimus $1 + (6 - 1) 2 = 1 + 5 . 2 = 1 + 10 = 11$ (§. 53); adeoque ſumma primi & ultimi $1 + 11 = 12$. Quare cum dimidius terminorum numerus ſit 3, erit (§. 51) ſumma totius progreſſionis $= 12 . 3 = 36$.

55. Si terminus primus a, differentia terminorum d, eorum numerus n, erit terminus ultimus $a + (n - 1) d$, ſumma primi & ultimi $= 2a + (n - 1) d$; adeoque ſumma totius progreſſionis $= \frac{1}{2} n (2a + (n - 1) d) = an + \frac{1}{2} (n^2 - n) d = an + (n^2 - n) \frac{1}{2} d$. Coroll. 1.

Invenitur ergo ſumma progreſſionis arithmeticæ, ſi facto ex termino primo in numerum

terminorum additur factum ex ſemidifferentia terminorum in differentiam numeri terminorum ab hujus numeri quadrato.

56. E. gr. Si terminus primus 3, differentia terminorum 4, numerus terminorum 7, erit ſumma progreſſionis $3 \cdot 7 + 2 \cdot (49 - 7) = 21 + 2 \cdot 42 = 21 + 84 = 105$. Hanc autem deprehendes eſſe ſummam progreſſionis.

3	7	11	15	19	23	27
				11	7	3
			15 +	30 +	30 +	30

Coroll. 4. 57. Sit $a = 1$, $d = 2$, numerus terminorum $= n$, erit ſumma progreſſionis $n + n^2 - n = n^2$. Summa ergo progreſſionis eſt ſemper numerus quadratus, quouſque tandem progrediaris, ſi terminus primus 1, differentia terminorum 2, hoc eſt, ſi progreſſio fuerit ſeries naturalis numerorum imparium 1, 3, 5, 7 &c. Quo caſu etiam notandum eſt, eſſe tum $\frac{1}{2} d = 1$.

Coroll. 5. 58. Sit $a = \frac{1}{2} d$, hoc eſt, ſi terminus primus ſemidifferentiæ terminorum eſt æqualis, & reliqua ut ante; erit ſumma $an + an^2 - an = an^2$ h. e. factum ex quadrato numeri terminorum in terminum primum.

Coroll. 6. 59. Sit $a = n = \frac{1}{2} d$ hoc eſt, ſi terminus primus, numerus terminorum, & ſemidifferentia terminorum ſint in-

ter

ter ſe æquales, erit ſumma progreſſionis $n^2 + n^3 - n^2 = n^3$. Quilibet ergo cubus reſolvi poteſt in progreſſionem arithmeticam, cujus terminus primus, numerus terminorum, horumque ſemidifferentia ſunt æquales radici cubi. E. g. 27 = 3 + 9 + 15.

60. Ex poſtremis tribus corollariis intelligi poteſt, quomodo ex formula vel theoremate generali deriventur alia; nimirum ea, quæ in formula generali nondum determinata ſunt, variis quibus id fieri poteſt modis determinando. Atque hac ipſa methodo in philoſophia ex notione generis derivamus notiones generum inferiorum & ſpecierum.

61. *Numeri polygoni* ſunt ſummæ progreſſionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur ſpeciatim *Triangulares*, ſi differentia terminorum progreſſionis 1; *Quadrati*, ſi 2; *Pentagoni*, ſi 3; *Hexagoni*, ſi 4; *Heptagoni*, ſi 5; *Octogoni*, ſi 6 &c. Definitio.

Illuſtrat definitionem ſchema ſequens:

Progreſſ. arith.	1	2	3	4	5	6	7	8
Num. Triangul.	1	3	6	10	15	21	28	36
Progr. arith.	1	3	5	7	9	11	13	15
Num. Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64.

&c. &c.

Contemplatio numerorum polygonorum ſerviet ad magni momenti veritates in philoſophia illuſtrandas.

Definitio. 62. *Latus numeri polygoni* appellatur numerus terminorum progreſſionis arithmeticæ, qui in unam ſummam colliguntur. *Numerus* autem *angulorum* appellatur, qui indicat quot angulos habeat figura, a qua numerus polygonus nomen ſuum eſt ſortitus.

Nempe numeri polygoni nomen habent a figuris geometricis, in quas unitates, quas continent, ceu totidem puncta diſponi poſſunt. Sic unitates numerorum triangularium, totidem punctis expreſſæ, diſponi poſſunt in triangulum; unitates numerorum quadratorum in quadratum &c.

Corollar. 63. *Numerus* ergo *angulorum excedit binario differentiam terminorum* progreſſionis arithmeticæ, ex quorum ſumma reſultat numerus polygonus (§. 61).

Eſt enim numerus angulorum in triangularibus 3 (§. 62), differentia terminorum progreſſionis, qui ſummantur, 1 (§ 61); in quadratis numerus angulorum 4 (§. 62), differentia terminorum progreſſionis 2 (§. 61) &c.

Problema. 64. *Dato latere numeri polygoni & numero angulorum, invenire numerum polygonum.*

Reſolutio. Dicatur latus n, & quoniam terminus primus in omni progreſſione arithmetica, quarum ſummæ ſunt numeri po-

polygoni, eſt 1 (§. 61), transferatur a ad deſignandum numerum angulorum; erit ergo differentia (§. 63) $= a - 2$, adeoque numerus polygonus (§. 55 & 61) $n + (n^2 - n)\frac{a-2}{2} = n + \frac{1}{2}(n^2 - n)\cdot(a - 2) = n + (an^2 - 2n^2 - an + 2n) : 2 = (an^2 - 2n^2 - an + 4n) : 2$ (§ 63 *arith.*)

$$= \frac{n^2(a-2) - n(a-4)}{2} \text{ (§. 21).}$$

Numerus polygonus eſt ſemidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum binario diminutum, & ex latere ipſo in numerum angulorum quaternario diminutum. Theorema.

65. Igitur ſi $a = 3$, ſeu ſi quæritur *numerus polygonus triangularis*, erit is Coroll. 1.

$$= \frac{n^2 + n}{2}$$

Eſt enim in hoc caſu $a - 2 = 1$, & $a - 4 = 3 - 4 = -1$, adeoque $n^2(a - 2) = n^2$, & $-n(a - 4) = -n(-1) = +n$. Si $a = 4$, adeoque ſi quæritur *numerus polygonus quadratus*, erit is

$$=\frac{2n^2}{2}-\frac{2n}{2}=n^2.$$

Si $a=5$, ſeu ſi quæritur numerus *pentagonus*, erit is $=\frac{3n^2-n}{2}$.

Si $a=6$, erit *hexagonus* $=\frac{4n^2-2n}{2}=2n^2-n$.

Si $a=7$, erit *heptagonus* $=\frac{5n^2-3n}{2}$.

Si $a=8$, erit *octogonus* $=\frac{6n^2-4n}{2}=3n^2-2n$.

Si $a=9$, erit *enneagon.* $=\frac{7n^2-5n}{2}$

Si $a=10$, erit *decagon.* $=\frac{8n^2-6n}{2}=4n^2-3n$.

&c. &c.

Coroll. 2. 66. Si in formula generali $n^2(a-2)-n(a-4)$ explicetur n per quemlibet numerum in ſerie naturali ab 1 incipiente, & a ſemper explicetur per 3, prodeunt numeri triangulares ſingulares, ut vides. Sit enim n nunc 1, tum 2, poſtea 3, tum 4, 5, 6, 7 &c. in infinitum, $a=3$, erunt *numeri triangulares ſingulares* ad normam formulæ generalis expreſſi

$$\frac{1^2 (3-2) - 1 (3-4)}{2}$$

$$\frac{2^2 (3-2) - 2 (3-4)}{2}$$

$$\frac{3^2 (3-2) - 3 (3-4)}{2}$$

$$\frac{4^2 (3-2) - 4 (3-4)}{2}$$

&c. in infinitum.

67. Si n denuo paulatim explicetur per quemlibet numerum ex ſerie naturali ab 1 incipiente, a vero conſtanter per 4, prodeunt *numeri tetragoni ſeu quadrati ſingulares* ad normam ejusdem formulæ generalis expreſſi. Nempe Coroll. 3.

$$\frac{1^2 (4-2) - 1 (4-4)}{2}$$

$$\frac{2^2 (4-2) - 2 (4-4)}{2}$$

$$\frac{3^2 (4-2) - 3 (4-4)}{2}$$

$$\frac{4^2 (4-2) - 4 (4-4)}{2}$$

&c. &c. in infinitum.

Fa-

Faciliſime id quivis imitabitur in numeris pentagonalis, hexagonis &c. nec ſine fructu, ſi quando in philoſophia pro modulo ſuo intelligere voluerit, quomodo univerſalia in ſingularibus intueatur DEus: ut alios alias taceam.

Definitio. 68. In ratione geometrica vel terminus major refertur ad minorem, vel minor ad majorem; illa dicitur *ratio majoris inæqualitatis*, hæc *ratio minoris inæqualitatis*. Ille autem terminus dicitur *Antecedens*, qui refertur ad alterum; *Conſequens* appellatur is, ad quem alter refertur.

E. gr. Si 6 refertur ad 3, dicitur ratio majoris inæqualitatis; ſi vero 3 refertur ad 6, ratio minoris inæqualitatis appellatur. In prima antecedens eſt 6, conſequens 3; in altera antecedens 3, conſequens 6.

Definitio. 69. *Exponens rationis* dicitur quotus ex diviſione antecedentis per conſequentem emergens.

E. gr. 6 : 3 = 2, ergo 2 eſt exponens rationis 6 ad 3; ex adverſo 3 : 6 = $\frac{1}{2}$ (§. 50 *arith*). Ergo $\frac{1}{2}$ eſt exponens rationis 3 ad 6.

Coroll. 1. 70. Quoniam in ratione majoris inæqualitatis terminus antecedens eſt major conſequente (§. 68); denominator autem rationis eſt quotus ex diviſio-

ſione majoris termini per minorem emergens (§. 92 *arith.*): idem autem quotus eſt etiam exponens ejusdem rationis (§. 69): in ratione majoris inæqualitatis exponens idem eſt cum denominatore rationis.

71. Cum dividendus ſit factum ex diviſore in quotum (§. 43 *arith.*) major rationis terminus quoque factum eſt ex minore in denominatorem rationis (§. 92 *arith.*). Enimvero ſi factum dividitur per factorem unum, quotus eſt alter ex factoribus (§. 108 *arith.*): ergo ſi major dividitur per denominatorem rationis, prodit minor. Unde ſi terminus minor dicatur a, denominator m, erit terminus major ma: ſi vero major dicatur a, erit minor $\frac{a}{m}$. Coroll. 2.

72. Quoniam $\frac{a}{m} = am^{-1}$ (§. 38), ſi denominatoris m^1 exponens 1 & poſitive per $+1$, & privative per -1 explicatur, deſignabit formula $a : am$ rationem tam majoris quam minoris inæqualitatis (§. 71, 68). nempe ratio minoris inæqualitatis eſt $a : am^1$; ratio majoris inæqualitatis $a :$ Coroll. 3.

am

am^{-1}; ibi a deſignat terminum minorem, hic majorem.

Coroll. 4. 73. Quoniam ratio minoris inæqualitatis eſt $a : am$ (§. 72); erit ejus exponens $\frac{a}{am} = \frac{1}{m}$ (§. 55 *arith.*).

Quare ſi plures rationes majoris inæqualitatis habent eundem denominatorem m; etiam rationes minoris inæqualitatis eorundem terminorum habebunt eundem exponentem $\frac{1}{m}$; & viciſſim ſi duarum vel plurium rationum minoris inæqualitatis idem eſt exponens $\frac{1}{m}$, erit etiam earundem rationum idem denominator m (§. 38.). Quare ſi duarum rationum idem eſt denominator m, erit tam exponens rationum majoris inæqualitatis (m) (§. 70) quam exponens rationum minoris inæqualitatis $\left(\frac{1}{m}\right)$ utrobique idem aut æqualis.

Enimvero rationes eædem, ſimiles, vel æquales ſunt, quarum idem eſt denominator (§. 93 *arith.*); ergo etiam *rationes, quarum idem eſt exponens, ſunt eædem, ſimiles, vel æquales.*

Problema 74. *Invenire factum ex termino primo in ultimum progreſſionis geometricæ.*

Quo-

Quoniam in progreſſione geometrica termini ſecundum eandem rationem progrediuntur (§. 26 *Trigon.*); adeoque eundem denominatorem (§. 93 *arith.*) imo eundem exponentem habent (§. 73); ſeries invenitur, quærendo ad duos quosque proximos tertium proportionalem. Unde, ſi terminus primus a, denominator m, erit progreſſio, ſi termini ſunt pares, Reſolutio.

$$\begin{array}{cccccc} a & am^1 & am^2 & am^3 & am^4 & am^5 \\ am^5 & am^4 & am^3 & am^2 & am^1 & a \\ \hline & & & a^2m^5 = & a^2m^5 = & a^2m^5 \end{array}$$

Si termini ſunt impares, erit

$$\begin{array}{ccccc} a & am^1 & am^2 & am^3 & am^4 \\ am^4 & am^3 & am^2 & am^1 & a \\ \hline & & a^2m^4 & a^2m^4 & a^2m^4 \end{array}$$

In progreſſione geometrica factum extremorum eſt æquale facto mediorum, aut quorumcunque duorum ab extremis æquidiſtantium, vel medii quadrato, ſi numerus terminorum impar. Theorema 9.

75. Si progreſſionis termini decreſcunt, erit progreſſio

$$\begin{array}{ccccc} a & am^{-1} & am^{-2} & am^{-3} & am^{-4} \\ am^{-3} & am^{-2} & & & a \\ \hline a^2m^{-4} & = a^2m^{-4} & & = a^2m^{-4} & \end{array}$$

adeoque perinde ut in creſcente progreſſione factum extremorum æquale facto duorum quorumlibet æquidiſtantium, aut medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

E. gr. Sit progreſſio geometrica *creſcens*

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 32 & & 8 & & & 2 \\ \hline 128 & = & 128 & = & & 128 \end{array}$$

Decreſcens,

$$\begin{array}{cccccc} 100000 & 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1. \\ 1 & & 10 & 100 & & \\ \hline 100000 & = & 100000 & = & 100000. & \end{array}$$

Problema. 76. *Invenire univerſim de quantitatibus proportionalibus theoremata quædam, de numeris proportionalibus in arithmetica propoſita.*

Reſolutio. Quoniam univerſim ratio quælibet exprimi poteſt per $a : am$ (§. 72), rationes autem ſimiles ſunt, quæ eundem denominatorem vel exponentem eundem habent (§. 73), erunt ratio-

nes

tunt ſimiles $a : am$, & $b : bm$, adeoque quantitates proportionales quatuor.

$$\frac{a : am = b : bm \atop b \qquad a}{abm = abm}$$

h. e. *factum ſub extremis, eſt æquale facto ſub mediis* (§. 104 *arith.*).

Si tres fuerint quantitates continue proportionales, erit

$$\frac{a \quad am \atop am}{a^2m^2} \quad \frac{am^2 \atop a}{= a^2m^2} \quad (\S.\ 71,\ 72).$$

h. e. *factum ſub extremis eſt æquale medio quadrato* (§. 105 *arith.*).

77. *Invenire plura alia de rationum ſimilitudine theoremata.* Problema

Quoniam rationes ſimiles ſunt, quæ eundem habent denominatorem (§. 92 *arith.*) vel eundem exponentem (§. 73); non opus eſt, niſi ut terminis rationum analytice expreſſis (§. 72) tentes quotlibet mutationes, & explores, idemne maneat duarum pluriumve rationum denominator vel exponens. Reſolutio.

I. Ita reperies, *ſi duas quantitates* a & am *multiplices per eandem tertiam* c, *facta eſſe inter ſe, ut quantitates multiplicatas.* &c. &c.

Sit enim $\begin{array}{cc} a & am \\ c & c \\ \hline \end{array}$

erit $ac : amc = a : am$.

Eſt quippe $ac)\ amc\ \{m$
& $a),\ am]m\ \}$ (§. 24).

II. Similiter $\begin{array}{cc} a & am \\ c & c \\ \hline \end{array}$

$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = a : am$

Eſt enim $\frac{am}{c}$ diviſum per $\frac{a}{c} = \frac{acm}{ac}$ (§. 59 *arith.*) ſeu $ac)\ acm\ \}\ m$. &

$a)\ am\ \}\ m$, hoc eſt, *ſi quantitates duas* a & am *per eandem tertiam* c *dividis, quoti* $\frac{a}{c}$ & $\frac{am}{c}$ *ſunt inter ſe, ut quantitates diviſæ* a & am.

III. Infertur hinc, ſi fuerit quotcunque quantitatum ſeries a, b, c, d, e, f, g &c. fore $abcdef : bcdefg = a : g$ hoc eſt, *ſi fuerit quotcunque quanti*ta-

tinuum ſeries, erit factum ex omnibus dempta ultima ad factum ex omnibus dempta prima, ut prima ad ultimam.

IV. Si fiat $a : ma$
$b : mb$

$$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb.$$

ſeu ſi fuerint duæ rationes ſimiles, differentia antecedentium eſt ad differentiam conſequentium, ut antecedens utriuslibet rationis ad conſequentem ſuum.

Eſt enim $a - b)\,\frac{ma - mb}{ma - mb}\,[\,m$, & $b)\,\frac{mb}{mb}\,[\,m$

$0 \qquad 0$

&c.

V. Si fiat $a : ma$
$b : mb$

erit $a + b : ma + mb = a : am =$ $b : bm$. hoc eſt. *Si fuerint duæ rationes ſimiles, erit ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium, ut antecedens utriuslibet rationis ad conſequentem ſuum.*

VI. Si fuerit $a : am$
$b : bm$
$c : cm$
$d : dm$
&c &c

erit $a + b + c + d : am + bm + cm + dm = a : am = b : bm$ &c. hoc eſt: *Si fuerint quotcumque rationes ſimiles, ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium ut antecedens unius cujuslibet rationis ad conſequentem ſuum.*

Ut ſequentia melius intelligantur, aſſumta proportio $a : am = b : bm$ ad omnes ſequentes referatur oportet; ſunt enim ſequentes omnes, ſi exceperis quintam, ſextam, decimam nonam, & vigeſimam, totidem concluſiones, quæ ex ſola proportione $a : am = b : bm$ inferuntur. Manere autem in proportionibus ex aſſumta illatis eundem denominatorem vel exponentem diviſio manifeſtat, quam proprio quilibet marte haud difficulter inſtituet, vacato in ſubſidium arithmeticæ §. 55, 54. Sic $\frac{a}{am} = \frac{1}{m}$ &c.

Sit

Sit $a : am = b : bm$

erit 1. *inverſe* $am : a = bm : b$

2. *alternatim* $a : b = am : bm$

3. *compoſite* $a + am : a = b + bm : b$
& $a + am : am = b + bm : bm$.

4. *diviſim* $a - am : a = b - bm : b$.
& $a - am : am = b - bm : bm$.

vel, ſi mavis, $am - a : a = bm - b : b$
& $am - a : am = bm - b : bm$.

5 Ex æquo ordinate { Si $a : am = b : bm$
& $am : amn = bm : bmn$,
erit $a : amn = b : bmn$.

6. Ex æquo perturbate { Si $a : am = b : bm$
& $am : amn = \frac{b}{n} : b$.
erit $a : amn = \frac{b}{n} : bm$.

7. $a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$.

8. $a^n : a^nm^n = b^n : b^nm^n$

9. $a : amc = b : bmc$

10. $a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$

11. $ac : am = bc : bm$

12. $\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$.

13. $ac : amc = b : bm$

14. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$

15. $ac : amc = bd : bmd$

16. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{d}$

17. $ac : amd = bc : bmd$ (§ 55 arith.).

18. $\frac{a}{c} : \frac{am}{d} = \frac{b}{c} : \frac{bm}{d}$ (§ 55 arith.).

19. Si $a : am = b : bm$
& $c : cn = d : dn$

erit $ac : acmn = bd : bdmn$

20. Si $a : am = b : bm$
$c : cn = d : dn$
$f : fr = g : gr$
$h : hs = l : ls$
&c. &c.

erit $acfh : acfhmnrs = bdgl : bdglmnrs$.

Theoremata hujus paragraphi poſteriora 20 ad imitationem priorum vocabulis explicare debent tirones, & ad multa exempla in numeris applicare, ut fiant familiaria. Sunt enim plurimi uſus per univerſam matheſin, & ſine eorum notitia non pauca phyſicæ hodiernæ placita intelligi nequeunt.

Definitio. 78. *Ratio compoſita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum quarumcunque antecedentibus ad factum ex earundem conſequentibus. Speciatim *ratio duplicata* dicitur, quæ ex duabus rationibus ſimilibus, tri-

triplicata, quæ ex tribus rationibus ſimilibus, *quadruplicata*, quæ ex quatuor rationibus ſimilibus componitur. &c. &c.

E. gr. Si fuerint rationes quotcunque $a : b$, $c : d$, $e : f$, $g : h$ &c. erit ratio ex iis compoſita, quam habet $aceg$ ad $bdfh$. Quodſi fuerit $a : b = c : d = e : f = g : h$, erit $ac : bd$ ratio duplicata, nimirum ejus rationis, quam habet a ad b, vel c ad d; ratio $ace : bdf$ erit triplicata, nempe uniuscujusque rationum ſimplicium ex quibus componitur; ratio $aceg : bdfh$ erit quadruplicata &c.

79. Quoniam $a : b = a : b = a : b$ &c. erit $a^2 : b^2$ ratio duplicata, $a^3 : b^3$ ratio triplicata, $a^4 : b^4$ ratio quadruplicata &c. hoc eſt, *quadrata habent rationem duplicatam ſuarum radicum, cubi triplicatam* &c. Et univerſim *Dignitates ejusdem gradus ſunt in ratione tantuplicata* ſuarum radicum ſeu *ſuorum laterum, quot unitates habet dignitatum exponens.* Coroll.

80. *Invenire rationem parallelogrammorum & triangulorum, præſertim ſimilium.* Problema.

Quoniam ex Geometria conſtat aream parallelogrammorum inveniri multiplicando baſin b vel B per altitudinem a vel A; erunt parallelogramma inter ſe ut ab ad AB. Quæcunque ergo ſit ra-

 tio,

tio, quam habent altitudines a ad A, & baſes b ad B; parallelogramma erunt inter ſe in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 78). Unde ſi parallelogramma ſunt æqualia, erunt eorum baſes & altitudines reciproce proportionales, ſeu ſi $ab = AB$, erit $a : A = B : b$ (§. 113 *arith.*).

Cum triangula ſint dimidia parallelogrammorum, ut ex Geometria notum, erunt ea inter ſe ut $\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}AB$. Sed eſt $\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}AB = ab : AB$ (§. 77 *num.* II.); ergo etiam triangula ſunt inter ſe in ratione compoſita baſium, & altitudinum. Quodſi æqualia fuerint, & ipſa reciprocabunt baſes & altitudines. Nam ſi $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB$, erit (§. 113 *arith.*) $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}A = B : b$. Sed $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}A = a : A$ (§. 77 *num.* II.). Ergo $a : A = B : b$ (§. 98 *arith.*).

Cum porro in triangulis & parallelogrammis ſimilibus altitudines (imo & ſegmenta baſium) ſint lateribus homologis, adeoque & baſibus proportionales (§. 291 *Geom.*). Si fuerit $ab \backsim AB$, erit $a : b = A : B$, adeoque etiam $a : A = b : B$ (§. 77 *num.* 2). Erit ergo ab ad AB in ratione duplicata ejus rationis, quam habent altitudines a ad A vel baſes b ad B (§. 78); ſeu

ſeu Parallelogramma ſimilia erunt inter ſe in ratione duplicata homologorum laterum.

Quoniam $\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}AB = ab : AB$ (§. 77 *num.* II.), patet triangula quoque ſimilia eſſe inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum, *per demonſtrata.*

81. Si plures quantitates fuerint continue proportionales, invenire, quam inter ſe rationem habeant eæ, quibus aliæ interponuntur. Problema.

Quantitates continue proportionales ſunt (§. 74) $a \quad am \quad am^2 \quad am^3 \quad am^4$. Reſolutio.

Eſt aut. $a : am^2 = a^2 : a^2m^2 = m^2$

$a : am^3 = a^3 : a^3m^3 = m^3$

$a : am^4 = a^4 : a^4m^4 = m^4$

&. &c.

hoc eſt : *Si plures fuerint quantitates continue proportionales prima eſt ad tertiam in ratione duplicata, ad quartam in ratione triplicata* &c. *primæ ad ſecundam* (§. 79).

CAPUT III.

De Regula Algebræ ad problemata Arithmetices & Geometriæ applicata.

Definitio. 82. *Æquatio* dicitur *ſimplex*, (§. 3), ſi quantitas incognita fuerit unius dimenſionis, ſeu dignitas duntaxat prima E. gr. ſi $x = \frac{a+b}{2}$.

Æquatio quadratica appellatur, ſi quantitas incognita ad duas dimenſiones aſſurgit, ſeu ſi fuerit dignitas ſecunda, ut $x^2 = ab + cd$. *Cubica* dicitur, ſi quantitas incognita eſt trium dimenſionum ſeu dignitas tertia, ut $x^3 = ab^2 + c^3$: *Biquadratica*, ſi eſt dignitas quarta, ut $x^4 = a^3b + c^4$.

Problema 83. *Problema datum algebraice reſolvere*, ſi æquatio fuerit ſimplex.

Reſolutio 1. Quantitates datæ diſtinguantur a quæſitis; datæ primis, quæſitæ poſtremis alphabethi literis denominentur (§. 8). Operatio hæc appellatur *Denominatio*, eſtque prima pars regulæ Algebræ. Denominandi artificia uſu melius, quam multis præceptis diſcuntur. Unde tirones probe attenti eſſe de-

debent ad modum denominandi, ſi quid ſingulare & præter conſuetum morem occurrit. Id quod de aliis quoque partibus regulæ Algebræ tenendum. Occurrerunt non pauca denominandi artificia jam in antecedentibus, unde hoc nomine merentur ſecundis curis a tirone perluſtrari.

2. Facta denominatione quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ in denominatis reperiuntur. Quodſi hoc fieri nequeat, id indicio eſt, *problema eſſe indeterminatum*, hoc eſt, unam alteramve quantitatum incognitarum pro arbitrio aſſumi poſſe. Pars hæc altera regulæ Algebræ *æquatio* dicitur compendio, alias *æquationis inventio*. Inveniuntur autem æquationes ope theorematum de quantitatum æqualitate. Occurrunt eorum non pauca in arithmetica, alia ſuppeditat doctrina de quantitatibus proportionalibus (§. 73 & ſeqq.), alia in progreſſu inveniuntur, aut aliunde haurienda.

3. Inventis æquationibus fit *Reductio*, quæ eſt tertia & ultima pars regulæ algebræ. Nempe ſi in æquatione quantitates cognitæ incognitis ſunt permixtæ, id agendum eſt, ut ex una e. g. ſiniſtra parte æquationis (ſeu quæ a ſiniſtris

eſt

eſt ſigni æqualium =) una tantum compareat quantitas incognita, ex altera autem parte æquationis (nempe a dextris ſigni æqualium =) non niſi quantitates cognitæ conſpiciantur. Obtinetur hoc ſi addita ſubtrahuntur, ſubtracta adduntur, multiplicata dividuntur, diviſa multiplicantur, ex dignitatibus radix extrahitur, aut radices ad dignitatem evehuntur, ita tamen, ut ex utraque parte æquationis æqualitas conſtanter conſervetur vi theorematum de æqualitate quantitatum.

84. Partes omnes hujus regulæ a ſequentibus problematibus lucem expectant, hæc enim ſunt totidem exempla, quibus problema præſens illuſtratur. Unde tirones regulas præſentis problematis conſtanter applicare debent in ſequentibus atque cum his conferre.

Problema. 85. *Scitur Cajum dixiſſe Titio ſibi fore annos* 110, *ſi ſuis adderetur quarta pars ætatis Titii, atque Titium reſpondiſſe, ſibi deeſſe tertiam partem ætatis Caji, ut numeret annos* 110. *Quæritur Caji & Titii ætas.*

Dicatur ætas Caji x Denominatio.
ætas Titii y
Erit per conditiones problematis Æquatio.

$$\text{I. } x + \tfrac{1}{4}y = 110 \quad \text{II. } y + \tfrac{1}{3}x = 110$$

$$\begin{array}{ll} 4 \quad 4 \text{ multipl.} & \tfrac{1}{3}x \quad \tfrac{1}{3}x \text{ ſubt.} \\ \hline 4x + 1y = 440 & y = 110 - \tfrac{1}{3}x \\ 4x \quad\quad 4x \text{ ſubtrah.} & \\ \hline y = 440 - 4x & \end{array}$$

Reductio.

$$\text{III. } 440 - 4x = 110 - \tfrac{1}{3}x \; (\text{§. 16 arith.}).$$

$$\begin{array}{l} 3 \quad\quad 3 \text{ multipl.} \\ \hline 1320 - 12x = 330 - x \\ 12x \quad\quad 12x \text{ add.} \\ \hline 1320 = 330 + 11x \\ 330 \quad 330 \text{ ſubtrab.} \\ \hline 990 = 11x \\ 11 \quad 11 \text{ divid.} \\ \hline 90 = x \end{array}$$

Ergo $\frac{1}{3} y = 30$. Quare cum ſit $y = 110 - \frac{1}{3}x$, erit $y = 110 - 30 = 80$. Ætas ergo Caji eſt annorum 90, ætas Titii annorum 80.

86. *Data ſumma duarum quantitatum, & earum differentia invenire quantitates ipſas.* Problema.

Sit

Denominatio. Sit data ſumma $= a$, Quantitas major $= y$,
differentia $= d$, minor $= x$

Æquatio. Erit per conditiones problematis

$$\text{I. } a = y + x \qquad \text{II. } d = y - x$$

Reductio.

$$a - x = y \qquad d + x = y$$

$$\text{III. } a - x = d + x \quad (\S.\ 16\ \textit{arith.})$$

$$x \qquad x \ \textit{add.}$$

$$a = d + 2x$$

$$d \qquad d \ \textit{ſubtr.}$$

$$a - d = 2x$$

$$2 \qquad 2 \ \textit{divid.}$$

$$\frac{a - d}{2} = x$$

Quoniam $y = d + x$ per æquationem II, ſubſtituendo pro x valorem inventum, erit $y = d + \frac{a - d}{2} = \frac{2d + a - d}{2}$ (§. 63 *arith.*) $= \frac{d + a}{2}$ ſeu $\frac{a + d}{2}$.

Regula. Si a ſumma duarum quantitatum ſubtrahitur differentia earundem, & reſiduum dividitur per 2, quotus erit quantitas minor. Quodſi ſummæ additur differentia, & aggregatum dividitur per 2; quotus erit quantitas major.

87. Quoniam $\frac{a-d}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ (§. 58, 59 *arith.*) & $\frac{a+d}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$ (§§. *cit.*), derivatur hinc ſequens *Theorema*. Corollar.

Duarum quantitatum major æqualis eſt aggregato ex ſemiſumma & ſemidifferentia, minor æqualis eſt ſemiſummæ minus ſemidifferentia (§. 71 *Trigonom.*).

88. Theorema hoc commodiori ſervit denominationi. Unde per ipſam algebram nova denominandi artificia reperiuntur. Neque hæc duntaxat, ſed etiam æquationum & reductionum artificia, ut attentus facie intelliget, ſi in ſequentibus, quoties aliquid occurrit inſoliti circa denominationes, æquationes, vel reductiones inquirat, quare hoc modo fiat denominatio, æquatio vel reductio.

89. *Radix æquationis* eſt valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. E. gr. Si fuerit æquatio $2x = ab$, radix erit $\frac{ab}{2}$. Unde ex æquatione radicem extrahere eſt idem ac invenire valorem quantitatis incognitæ in æquatione occurrentis. Definitio.

90.

Problema. 90. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

Reſolutio. Si æquatio eſt pura, ut $x^2 = ab$, patet eſſe $x = \sqrt{ab}$.

Si æquatio eſt affecta, ut $x^2 + ax = b^2$ vel $x^2 - ax = -b^2$, ope theorematis de quadrato radicis binomiæ (§. 41, 42) ex $x^2 + ax$ vel ex $x^2 - ax$ fit quadratum radicis binomiæ completum, addendo $\frac{1}{4}a^2$. Nempe ſi x ſumitur pro parte una radicis, erit a duplum partis ſecundæ radicis (§. 41), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera radicis, cujus quadratum eſt $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$. Addito autem $\frac{1}{4}a^2$ ad $x^2 + ax$ vel ad $x^2 - ax$, radix quadrata $x + \frac{1}{2}a$ vel $x - \frac{1}{2}a$ aut $\frac{1}{2}a - x$ extrahi inde poteſt, & hac extracta etiam porro radix æquationis inveniri.

Sit enim $x^2 + ax = b^2$

Erit $\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$ *add.*

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

$$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a.$$

Sit $x^2 - ax = b^2$
Erit $\frac{1}{4}a^2$ $\frac{1}{4}a^2$ *add.*

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)$$
vel $\frac{1}{2}a - x = \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$

$$x = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2) + \tfrac{1}{2}a$$
vel $\frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2) = x$.

Enimvero cum ſit $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $\frac{1}{2}a = \surd \frac{1}{4}a^2$ (§. 67 *arith.*), erit $\surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2) > \frac{1}{2}a$, adeoque ex $\frac{1}{2}a$ ſubtrahi nequit. Unde re ipſa $\frac{1}{2}a$ ſubtrahendum eſt ex $\surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$ & reſiduo præfigi debet ſignum privativum (§. 20 regula 2). Quare hoc in caſu x evadit quantitas negativa; quæ *radix falſa* appellari ſolet.

Sit $x^2 - ax = - b^2$
Erit $\frac{1}{4}a^2$ $\frac{1}{4}a^2$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)$$
vel $\frac{1}{2}a - x = \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \surd(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)$$
vel $\frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2) = x$.

Cum ſit $\frac{1}{2}a = \surd \frac{1}{4}a^2$, adeoque $\frac{1}{2}a > \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$ poteſt ex $\frac{1}{2}a$ ſubtrahi $\surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Unde valor ipſius x reperitur utrobique poſitivus. Duæ

X ergo

ergo ſunt *radices veræ* æquationis $x^2 - ax = -b^2$. Dicitur enim *radix vera*, ſi fuerit valor ipſius quantitas poſitiva.

Problema 91. *Invenire duas quantitates, quarum datur factum & differentia.*

Sit factum $= a$ Quantitas major $= y$
Differentia $= d$ minor $= x$

Erit I. $yx = a$ II. $y - x = d$

$$y = a : x \qquad y = d + x$$

$$\text{III. } \frac{a}{x} = d + x \text{ (§. 16 } arith.)$$

$$a = dx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 \quad \tfrac{1}{4}d^2 \text{ (§. 177)}$$

$$a + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + dx + x^2$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} = \tfrac{1}{2}d + x$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d = x$$

E. gr. Sit $a = 765$, $d = 28$, adeoque $\tfrac{1}{2}d = 14$, & $\tfrac{1}{4}d^2 = 196$, $a + \tfrac{1}{4}d^2 = 961$. $\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} = 31$, $\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d = 31 - 14 = 17$. Quare cum ſit $y = d + x$, erit $y = 28 + 17 = 45$.

Problema Tab. I. Fig. 3. 92. *Ex dato puncto A ducere rectam AT, quæ circulum datum tangat.*

Sumamus factum eſſe, quod petebatur; hoc enim artificium eſt inve-

Sit

Sit AC $= a$
BC $=$ CT $= r$
AT $= x$

Quoniam Tangens eſt perpendicularis ad radium circuli in puncto contactus (§. 6 *Trigon.*) erit (§. 272 *Geom.*)

$$AC^2 = AT^2 + CT^2$$
$$a^2 = x^2 + r^2$$
$$a^2 - r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(a^2 - r^2)} = x.$$

Eſt ergo AT media proportionalis inter $a + r$ & $a - r$ ſeu inter AD & AB. Notum eſt enim factum ex $(a + r)$ in $(a - r)$ eſſe $a^2 - r^2$. Quare ſi BA ex A transfertur in E, & ſuper ED deſcribitur ſemicirculus, perpendicularis in A erecta oſtenderet quantitatem tangentis. Unde facile ex A determinatur punctum circuli T, ad quod ſi ex A ducatur recta AT, tanget hæc circulum. Enimvero brevius & concinnius reperitur tangens; ſi punctum datum & centrum circuli dati conjungis recta AC; & ſuper hanc deſcribis ATC Semicirculum. Hic enim ſecabit circulum datum in puncto T, ad quod ducta recta ex A circulum datum tan-

get. Cum enim angulus in ſemicirculo ſit rectus (§. 201 *Geom.*) ductis chordis AT & CT, erit T angulus rectus, CT radius circuli dati, adeoque AT perpendicularis ad radium (§. 67 *Geom.*) in puncto radii extremo & in peripheriam deſinente; ideoque AT tangens circuli BTD (§. 6 *Trigon.*).

Problema. Tab. I. Fig. 2. 93. *Invenire relationem rectarum* AT & TE *ex puncto eodem* T *extra circulum dato ductarum, ita ut altera* AT *circulum tangat in* A, *altera* TE *eundem ſecet per centrum tranſiens.*

Sit diameter BE $= a$ TB $= x$
Tangens TA $= b$ TC $= x + \frac{1}{2}a$
Radius AC $= \frac{1}{2}a$ TE $= a + x$

Quoniam TA eſt perpendicularis ad radium in puncto A (§. 6 *Trigonom.*), erit (§. 272 *Geom.*)

$$b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$b^2 = x^2 + ax = (a + x)x$$

hoc eſt $x : b = b : a + x$

Theorema. 1. Quadratum tangentis TA æquale eſt rectangulo ex ſecante TE in ejus portionem extra circulum TB.

2. Tangens TA eſt media proportionalis inter ſecantem TE & ejus portionem extra circulum TB.

94. Datam rectam AB media & extrema ratione ſecare, hoc eſt, ita, ut tota AB ſit ad partem majorem AC, ut pars hæc major AC eſt ad partem minorem CB. Problema. Tab. I. Fig. 1.

Sit $AB = a$
$AC = x$
erit $CB = a - x$

Unde per conditionem problematis

$$a : x = x : a - x$$
$$a^2 - ax = x^2$$
$$a^2 = x^2 + ax$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\tfrac{5}{4}a^2 = x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = x + \tfrac{1}{2}a$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Conſtructio. Erigatur in B perpendicularis $BD = \frac{1}{2}a$. Erit $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 272 *Geom.*). Fiat $DF = DB = \frac{1}{2}a$, erit $AF = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$. Igitur ſi fiat $AC = AF$, erit linea media & extrema ratione ſecta.

CAPUT V.

De Algebra ad Geometriam ſublimiorem applicata.

Definitio. 95. *Geometria ſublimior* appellatur ea Geometriæ pars, quæ de lineis curvis & ſolidis inde genitis agit.

96. In Geometria elementari non alia conſideratur curva, quam peripheria circuli. In hoc libello fere unice de Sectionibus conicis agendum. Sunt autem *Sectiones conicæ* lineæ curvæ, quæ ex coni ſectione oriuntur. Numerantur tres præter circulum, nemſe Parabola, Hyperbola, & Ellipſis. Nimirum ſi conus ACB ſecatur ita, ut ſectionis axis *ab* ſit baſis diametro AB parallelus, ſectio eſt *Circulus*; ſi vero ſectionis axis *cd* concurrit cum baſis diametro AB continuata in E, ſectio eſt Ellipſis. Si conus idem ACB ſecatur ita, ut ſectionis axis *ex* ſit coni lateri CB parallelus, ſectio dicitur *Parabola*; ſi vero ſectionis axis *aq* cum coni latere AC continuato in F concurrit, ſectio eſt *Hyperbola*. Clariora hæc fiunt, ſi ſectiones iſtæ coram oſtendantur in cono ligneo convenienti ratione ſecto.

Fig. 12.

97. Ad naturam curvæ inveſtigandam ducuntur intra eam a puncto ejus uno M ad aliud oppoſitum M rectæ æquidiſtantes MM; ex alio curvæ puncto A ducitur recta AD priores bifariam ſeu in duas partes æquales ſecans.

Tab. I. Fig. 4.

Unde *Diameter curvæ* AD eſt recta rectas MM inter ſe parallelas bifariam ſecans in P. Speciatim *Axis* vocatur, ſi rectas intra curvam parallelas ſeu æquidiſtantes bifariam ſecat ad angulos rectos. Punctum curvæ A, ex quo ducitur diameter, appellatur *Vertex curvæ*; lineæ autem æquidiſtantes MM, quæ a diametro bifariam ſecantur, dicuntur *ordinatim applicatæ*. harum dimidiæ MP vel PM appellantur *Semiordinatæ*; pars vero diametri AB inter verticem A & ſemiordinatam PM intercepta dicitur *Abſciſſa*.

98. Deinceps niſi aliud diſerte moneatur, ſemper dicetur abſciſſa x, ſemiordinata y. Axis eſt ſpecies diametri; diameter enim in curvis quibusdam ordinatas bifariam ſecare poteſt ad angulos obliquos.

99. Non erit inutile ſi notiones & vocabula paulo ante (§. 97) allata tirones ad circulum, utpote ſibi familiarem, applicent. Sit enim AMB Semicirculus, cujus diametro AB inſiſtat perpendicularis PM, erit AB axis, A vertex, PM ſemiordinata, AP abſciſſa, vel *ſagitta*, ut quidam appellant. Notum eſt ex Geometria (§ 306 *Geom.*), ſi erigitur in puncto quocunque diametri perpendicularis PM, hanc eſſe mediam proportionalem inter partes diametri AP & PB. Quare ſi ſit AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit PB $= a - x$, & $x : y = y : a - x$ (§. 306 *Geom.*) adeoque ax Tab. I. Fig. 52.

— x^2,

— $x^2 = y^2$ (§. 104 *arith*). Cum ſingula puncta peripheriæ circuli ad diametrum habeant hanc eandem relationem (§. 306. *Geom.*); æquatio $y^2 = ax - x^2$ æquipollet definitioni peripheriæ circuli; per hanc enim æquationem peripheria circuli agnoſci, & ab alia quacunque curva diſcerni poteſt.

Definitio 100. *Quantitates variabiles* ſunt, quæ aliis creſcentibus vel decreſcentibus creſcunt etiam ipſæ aut decreſcunt. Sic in circulo creſcente abſciſſa AP creſcit etiam ſemiordinata PM, decreſcente abſciſſa AP decreſcit ſemiordinata PM; & viciſſim. Ergo abſciſſa & ſemiordinata circuli ſunt quantitates variabiles. E contrario *Quantitates conſtantes* ſunt, quæ creſcentibus aliis vel decreſcentibus eædem manent. Sic Diameter circuli vel Semidiameter ſive Radius ſemper manet idem, dum abſciſſæ & ſemiordinatæ creſcunt aut decreſcunt. Quantitates conſtantes indigitantur primis alphabethi literis a, b, c; variabiles poſtremis x, y, z.

Definitio Tab. I. Fig. 4. 101. *Parabola* eſt curva, in qua $ax = y^2$, ſeu in qua quadratum ſemiordinatæ PM æquale eſt rectangulo ex abſciſſa AP in rectam conſtantem, quæ axis *Parameter* vel *Latus rectum* appellatur. *Parabola* hæc, quæ a celebri inter

ve-

veteres mathematico Apollonio Pergæo *Apolloniana* appellatur. Parameter in figuris exprimi non ſolet, ſed ſubintelligi. Concipitur autem ad axem eſſe perpendicularis in vertice A.

102. Quoniam a deſignat quantitatem conſtantem, nempe parametrum; quo x ſeu abſciſſa eſt major, eo etiam majus erit y^2 quadratum ſemiordinatæ, adeoque eo major erit ſemiordinata. Ergo in parabola creſcentibus abſciſſis conſtanter creſcunt ſemiordinatæ; adeoque parabola non eſt curva in ſe rediens. Coroll. 1.

103. Ob $y^2 = ax$ per naturam parabolæ Coroll. 2.

erit $\frac{y^2}{x} = a$

hoc eſt: Parameter eſt tertia proportionalis ad abſciſſam & ſemiordinatam (§. 109 *arith.*). Coroll. 3.

104. Similiter ob $y^2 = ax$,

erit $\frac{y^2}{a} = x$

hoc eſt: Abſciſſa eſt tertia proportionalis ad parametrum & ſemiordinatam (§. *cit.*).

Coroll. 4. 105. Porro ſi $y^2 = ax$

erit $y = \sqrt{ax}$

hoc eſt: Semiordinata eſt media proportionalis inter parametrum & abſciſſam (§. 107 *arith.*).

Coroll. 5. 106. Data parametro, AB & poſitione axis poteſt BN quodlibet punctum parabolæ geometrice determinari. Quæratur enim an punctum M ſit in parabola. Demittatur ex eo perpendicularis MP ad axem BN; fiat PN = AB parametro; & ſuper NB deſcribatur Semicirculus; hic ſi tranſit per punctum M, erit hoc in parabola. (§. 103).

Fig. 6. Tab. I.

Coroll. 6. 107. Sit $x = a$

erit $y^2 = a^2$

$y = a.$

hoc eſt: Si abſciſſa fuerit parametro æqualis, etiam ſemiordinata parametro æqualis erit, adeoque tum abſciſſa etiam ſemiordinatæ æqualis erit (§. 16 *arith.*).

Coroll. 7. 108. Sit $x = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2$

$y = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

hoc

hoc eſt: Si abſciſſa fuerit æqualis ſemiparametro, ſemiordinata erit æqualis mediæ proportionali inter parametrum & ſemiparametrum.

109. Sit $y = \frac{1}{2}a$ Coroll. 8.

erit $ax = \frac{1}{4}a^2$

$x = \frac{1}{4}a$

hoc eſt: Si ſemiordinata ſemiparametro æqualis, abſciſſa erit quarta pars parametri.

110. *Focus* appellatur punctum axis F, in quo ſemiordinata ſemiparametro æqualis. Definitio. Fig. 7. Tab. I.

111. Diſtat ergo focus a vertice parabolæ quarta parte parametri (§. 109). Coroll. 1.

112. Si $x = \frac{1}{4}a$ Coroll. 2.

erit $4x = a$

hoc eſt: Parameter eſt quadruplum diſtantiæ foci a vertice, & hæc eſt ſubquadrupla parametri.

113. Si $x = \frac{1}{4}a$ Coroll. 3.

erit $y^2 = \frac{1}{4}aa$

$\frac{y^2}{a} = \frac{1}{4}a$

hoc eſt: Diſtantia foci a vertice eſt tertia proportionalis ad parametrum,

&

& ſemiordinatam (§. 298 Geom.) foco reſpondentem.

Coroll. 4. 114. Sit alia abſciſſa AP, erit $PM^2 = y^2 = ax$ (§. 101); rectangulum vero ex diſtantia foci a vertice AF in abſciſſam $AP = \frac{1}{4}a \cdot x = \frac{1}{4}ax$. Eſt ergo PM^2, ſeu quadratum ſemiordinatæ quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam quamcunque.

Coroll. 5. 115. Eſt $y^2 = ax$ (§. 101).

$$\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}ax$$

$$(\tfrac{1}{4}y^2) : x = \tfrac{1}{4}a$$

$$x : \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}y : \tfrac{1}{4}a$$

Itaque diſtantia foci a vertice eſt tertia proportionalis ad abſciſſam quamcunque & dimidiam ſemiordinatam abſciſſæ reſpondentem (§. 298 *Geom.*).

Problema. 116. *Invenire rationem ſemiordinatarum in parabola.*

Tab. I. Fig. 7. Sit abſciſſa una $AP = x$, altera $Ap = u$, ſemiordinata $PM = y$, $pm = z$, erit $y^2 = ax$ (§. 224)

$$z^2 = au$$

$$y^2 : z^2 = ax : au$$

$$= x : u \text{ (§. 77 n II.)}$$

hoc

hoc eſt: *Quadrata ſemiordinatarum in parabola ſunt inter ſe ut abſciſſæ.*

117. Si $u = a$, eſt etiam $x = a$ (§. 107), adeoque $z^2 = a^2$. Quare ſi $x = \frac{1}{4}a$, erit (ob $y^2 = ax$) $y^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 101), ideoque $y = \frac{1}{2}a$. In foco ergo ſemiordinata eſt duplum abſciſſæ; ſeu ſi $x = \frac{1}{4}a$, erit $y = \frac{1}{2}a$, quæ eſt converſa prioris (§. 109). Unde nuſpiam quam in foco parabolæ ſemiordinata eſt ſemiparametro æqualis. Coroll. I.

118. *Invenire quantitatem rectæ FM a foco F ad extremitatem ſemiordinatæ M ductæ.* Problema. Tab. I. Fig. 7.

Sit $AP = x$; erit $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 111), adeoque $FP = x - \frac{1}{4}a$. Quare cum ſit (§. 272 *Geom*),

$$FM^2 = FP^2 + PM^2$$

erit $FM^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + y^2$

ſeu ob $y^2 = ax$ (§. 101

$$FM^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + ax$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Igitur recta FM ex foco parabolæ F ad extremitatem ſemiordinatæ ducta ubique æqualis eſt aggregato ex abſciſſa AP & quarta parte parametri ſeu diſtantia foci a vertice AF.

Coroll. 1. Tab. I. Fig. 8. 119. Quodſi ergo fiat $AF = Af =$ quartæ parti parametri, & ducantur ad axem AX perpendiculares PM, PM &c. quantumvis productæ; determinari poſſunt omnia puncta M, ſi circino ad intervalla Pf aperto fiant ſemper $Pf = FM$. Atque tum curva per puncta M tranſiens erit parabola.

Coroll. 2. 120. Imo licet nunc parabolam motu continuo deſcribere. Aſſumta enim recta fX pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$, in f firmetur regula CD ſecans axem fX ad angulos rectos. Extremitati H regulæ alterius IGH alligetur filum, quod æquet axem Xf ſeu latus HG. Idem filum altero ſui extremo ſit fixum in foco F. Quodſi ſtylo ad regulam GH applicato regulam IGH juxta ductum alterius CD promoveas, ſtylus parabolam deſcribet. Erit enim conſtanter $FM = MG = Pf = x + \frac{1}{4}a$, adeoque punctum quodlibet M in parabola (§. 118).

Problema Tab. I. Fig. 7. 121. *Invenire quantitatem chordæ AM ex vertice A in punctum extremum M ſemiordinatæ PM ductæ.*

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \text{ (§. 272 Geom.)}$$

hoc eſt $AM^2 = x^2 + ax$ (§. 101)

$$AM = \sqrt{(ax + x^2)} = \sqrt{((a+x)x)}$$

Chor-

Chorda igitur ex vertice parabolæ in extremitatem ſemiordinatæ ducta eſt media proportionalis inter abſciſſam & aggregatum ex parametro & abſciſſa.

122. *Invenire quantitatem rectanguli ex ſumma ſemiordinatarum* pm *&* PM *in differentiam earundem* mR. Problema.

Si $pm + PM$ multiplicatur per $pm - PM$, factum eſt $pm^2 - PM^2$. Quare cum porro, ſi fiat $AP = x$, $Ap = z$, etiam ſit $pm^2 = az$, $PM^2 = ax$ (§. 101), erit $pm^2 - PM^2 = az - ax = (z - x)a$. Igitur rectangulum ex ſumma duarum ſemiordinatarum in earundem differentiam æquale eſt rectangulo ex parametro in differentiam abſciſſarum.

123. Eſt ergo differentia abſciſſarum ad differentiam ſemiordinatarum, ut harum ſumma ad parametrum. Coroll.

124. *Invenire quantitatem rectanguli ex ſemiordinata in abſciſſam.* Problema.

Dicatur abſciſſa x, ſemiordinata y, erit $x = \frac{y^2}{a}$ (§. 104), adeoque

$$xy = \frac{y^2}{a} \cdot y = \frac{y^3}{a}$$

hoc

hoc eſt: rectangulum ex abſciſſa in ſemiordinatam eſt quarta proportionalis ad parametrum, ſemiordinatam, & quadratum ſemiordinatæ, ſeu, quod perinde eſt,

$$a : y = y^2 : xy$$

Parameter eſt ad ſemiordinatam, ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam.

125. *Invenire quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una x, altera u, ſemiordinata una y, altera z, erit (§. 104)

$x = \frac{y^2}{a}$, & $u = \frac{z^2}{a}$; adeoque

$$x\,u = \frac{y^2 z^2}{a^2}$$

hoc eſt: $a^2 : y^2 = z^2 : xu$.

ſeu Quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum ex abſciſſis.

126. Ut uſus aliquis in reſolvendis problematibus hactenus de parabola dictorum vel nunc appareat, juvat ſequens annectere problema.

127. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.* Problema

Sit datarum major $= b$ quæſitarum
minor $= a$ minor $= y$
major $= x$

Erit per conditionem problematis

$$a : y = y : x \qquad y : x = x : b$$
$$ax = y^2 \qquad by = x^2$$

Utraque æquatio eſt ad parabolam (§. 101) ut probe advertit *Menechmus* celebris inter veteres Geometra, duas igitur combinavit parabolas ita, ut unius ſemiordinata fieret alterius abſciſſa, & viciſſim. Si enim circa axem AS parametro a deſcribatur parabola AMN; circa axem AR parametro b parabola AMO, erit AP $=$ QM $= x$, PM $=$ AQ $= y$. Unde vi parabolæ primæ $ax = y^2$, & vi ſecundæ $by = x^2$. Tab. I. Fig. 9.

Problema hoc multum exercuit Græcorum ingenia. Primus enim obſervaverat Hippocrates Chius, e mercatore naufrago Geometra factus, problema de duplicando cubo quod Deliis remedium contra peſtem quærentibus oraculum propoſuit, revocari poſſe ad problema de inveniendis duabus mediis proportionalibus inter duas lineas datas. Unde poſtea in his inveniendis deſudarunt Pla-

ſo, Heron Alexandrinus, Apollonius Pergæus, Eratoſthenes, Pappus Alexandrinus, Sporus, Architas Tarentinus, Philo Byzantius, Philoponus, Diocles, Nicomedes, & Menechmus, quorum diverſas ſolutiones poſteritati conſervavit Eutocius Aſcalonita in commentariis in librum ſecundum Archimedis de Sphæra & Cylindro. Si quis noſſe deſiderat, quomodo problema de duplicando cubo revocari potuerit ad problema de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus, is perpendat ſequentia.

Coroll. 1. 128. Sit latus cubi dati $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit

$$2a^3 = y^3$$

Fiat $2a = b$, erit $2a^3 = a^2 b$,

adeoque $y^3 = a^2 b$

$y \quad y$ multipl.

$$y^4 = a^2 by$$

$$a^2 : y^2 = y^2 : by$$

Sit $by = x^2$.

erit $y : x = x : b$

& $a^2 : y^2 = y^2 : x^2$

$$a : y = y : x = x : b$$

Igitur a, y, x, b ſunt continue proportionales. Quodſi ergo inter latus cubi, & ejus duplum quæruntur duæ mediæ continue proportionales, erit earum prima latus cubi dupli.

129. Quare cum in genere latus cubi tantupli poſſit dici y, & numerus quantuplum exprimens poſſit dici m, erit æquatio pro tantuplicatione cubi $ma^3 = y^3$. Unde inter a & ma quærendæ ſunt duæ mediæ continue proportionales: Coroll. 2.

130. *Ellipſis* eſt linea curva, in qua rectangulum ex duabus axis partibus (AP.PB) eſt ad quadratum ſemiordinatæ (PM^2) ut axis AB ad parametrum AL; ſeu ſi axis dicatur a, pars ejus una x, adeoque altera $a-x$, ſemiordinata y, parameter b; erit Problema Tab. I. Fig. 10.

$$(a-x)x : y^2 = a : b$$

$$abx - bx^2 = ay^2$$

131. Quia eſt $ay^2 = abx - bx^2$ Coroll.

$$\text{erit } y^2 = bx - \frac{xb^2}{a}$$

hoc eſt: Quadratum ſemiordinatæ æquale eſt rectangulo ex parametro in abſciſſam, demto tamen alio rectangulo ($\frac{bx^2}{a} = \frac{bx}{a} \cdot x$) ex abſciſſa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abſciſſam.

Coroll. 2. 132. Quoniam $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2 = (bx - y^2)a$

$$\frac{bx^2}{bx - y^2} = a$$

Ergo $bx - y^2 : x^2 = b : a$

$$b - \frac{y^2}{x} : x = b : a$$

Igitur differentia parametri a tertia proportionali ad abſciſſam & ſemiordinatam eſt ad abſciſſam, ut parameter ad axem. Unde datis parametro, abſciſſa, & ſemiordinata reperitur axis per communem Geometriam (§. 298, 299 *Geom.*)

Coroll. 3. 133. Sit $a = b$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$$y^2 = ax - x^2$$

Ergo ſi parameter axi æqualis æquatio ad ellipſin degenerat in æquationem ad circulum (§. 99); unde circulus ſpecies quædem ellipſium eſt, obtenturus nomen ellipſeos æquilateræ, niſi pridem nomen circuli obtinuiſſet.

134. Sit $x = \frac{1}{2}a$ Coroll. 4.

erit $abx - bx^2 = \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}a^2b$

$$= \frac{1}{4}a^2b$$

$$ay^2 = \frac{1}{4}a^2b$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{4}ab)}.$$

hoc eſt: ſi abſciſſa dimidio axi æqualis fuerit, ſemiordinata eſt media proportionalis inter parametrum & quartam axis partem.

Igitur $\frac{1}{4}a : y = y : b.$

135. Semiordinata ſeu normalis CD axem bifariam (in partes nempe æquales dividens) *Axis minor dimidius* appellatur. Axis minor appellatur etiam *Axis conjugatus.* Eſt igitur dimidius axis minor, ſeu $CD = \sqrt{(\frac{1}{4}ab)}$ (§ 134) Definitio. Tab. I. Fig. 10.

136. *Ex datis axe majore & parametro invenire axem minorem.* Problema.

Dicatur dimidius axis minor $\frac{1}{2}z$, erit (§. 134, 135

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z : b$$

$$\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}z^2$$

$$ab = z^2$$

$$\sqrt{ab} = z$$

hoc eſt: axis minor eſt media proportionalis inter axem majorem & parametrum.

Coroll. 1. 137. Ergo parameter eſt tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

Coroll. 2. 138. Dicatur axis mojor a, minor d, erit parameter $b = d^2 : a$ (§. 137). Subſtituatur hic parametri valor in æquatione ordinaria ad ellipſin, quæ eſt (§. 131) $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$

$$\text{erit } y^2 = \frac{d^2x}{a} - \frac{d^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{ad^2x - d^2x^2}{a^2} = \frac{(ax - x^2)d^2}{a^2}$$

Ergo $a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$ (§. 110 *arith.*)

$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y.$$

Igitur ſemiordinata in ellipſi eſt quarta proportionalis ad axem majorem, minorem, & ſemiordinatam circuli ſuper axe majore deſcripti, quæ reſpondeat eidem abſciſſæ, cui reſpondet ſemiordinata ellipſeos.

139. *Invenire focum in ellipſi*, id eſt, diſtantiam foci a vertice. Problema. Tab. I. Fig. 10.

Cum in foco ſemiordinata ſit æqualis ſemiparametro (§. 110),

erit
$$y = \tfrac{1}{2}b$$
$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2$$

Quare cum in ellipſi ſit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (§. 131).

erit
$$\tfrac{1}{4}b^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$
$$\tfrac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$
$$\tfrac{1}{4}ab = ax - x^2$$
$$-\tfrac{1}{4}ab = -ax + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2 \text{ (§. 90)}$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a - x$$
$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)}.$$

Quoniam $CD = \sqrt{(\tfrac{1}{4}ab)}$ (§. 135), erit $CD^2 = \tfrac{1}{4}ab$. Quare ſi fiat $DF = \tfrac{1}{2}a$, erit
$$DF^2 = CD^2 + FC^2 \text{ (§. 272 Geom.)}$$
$$DF^2 - CD^2 = FC^2$$
hoc eſt: $\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab = FC^2$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)} = FC.$$

Quare cum ſit $AC = \tfrac{1}{2}a$, & $AF = AC - FC$, erit $AF = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)} = x$; adeoque in F focus ellipſeos.

Unde axe minore ſuper majore [illegible]ter erecto ex puncto D intervallo CA = DF = ½a facillime determinatur uterque focus ellipſeos F & *f*.

In reductione hujus problematis occurrit æquatio $\frac{1}{4}ab = ax - x^2$

(§. 111.) hoc eſt $\frac{1}{4}ab = (a - x)x$.

Hinc eruitur ſequens theorema: *Si axis ſecatur in foco; rectangulum ex partibus duobus axis majoris æquale eſt quadrato axis minoris dimidii* (§. 185); vel etiam *rectangulum illud* AF . FB *eſt ſubquadruplum rectanguli ex parametro* b *in axem majorem* a.

Diſcunt hinc tirones, ſi attente perluſtrentur æquationes reductionis, non inelegantia nonnunquam reperiri theoremata.

140. Quoniam $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = \sqrt{(DF^2 - DC^2)} = \sqrt{(AC^2 - DC^2)}$ (§. 139); erit quadratum diſtantiæ foci a centro C æquale differentiæ quadratorum axis dimidii majoris & minoris.

Problema Fig. 10. Tab. I.

141. *Invenire rationem ſemiordinatarum* PM & pm *in ellipſi*.

Sit

Sit AP $= x$, $Ap = u$, PM $= y$, $pm = z$, erit (§. 131)

$$y^2 = \frac{abx - bx^2}{a}$$

$$z^2 = \frac{abu - bu^2}{a}$$

$$z^2 : y^2 = \frac{abu - bu^2}{a} : \frac{abx - bx^2}{a}$$

$z^2 : y^2 = abu^2 - bu^2 : abx - bx^2$ (§. 77 *n.* 13)
$= au - u^2 : ax - x^2$ (§. 77 *n.* 14)
$= (a - u)u : (a - x)x$

hoc eſt: *In ellipſi quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula ex partibus axis reſpondentibus.*

142. Igitur eſt quoque Coroll. 1.
DC^2 : PM^2 = AC . CB : AP . PB
hoc eſt ob AC = CB.
DC^2 : PM^2 = AC^2 : AP . PB

DC^2 : AC^2 = PM^2 : AP . PB (§. 77 *n.* 2)
ſeu *Quadratum* dimidii *axis minoris eſt ad quadratum* dimidii *axis majoris, ut quadratum ſemiordinatæ cujuscunque ad rectangulum ex ſegmentis axis majoris, quæ ſemiordinatæ reſponderint.*

143. Si CD^2 : AC^2 = PM^2 : AP . PB, Coroll. 2.
eſt etiam 4 CD^2 : 4 AC^2 = PM^2 : AP . PB

Z (§. 77

(§. 77. n. 13). Valet ergo idem de quadratis integrorum axium, quod modo dictum eſt de quadratis dimidiorum.

Problema. Fig. 10. Tab. I. 144. *Invenire quantitatem rectarum FM & fM ex foco utroque F & f ad extremum ſemiordinatæ punctum M ductarum.*

Sit $FC = fC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$ (§. 139) $= c$. Compendii cauſſa in calculo. Sit porro $AP = x$, erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $PF = FC - PC = c - \frac{1}{2}a + x$, $Pf = Cf + PC = c + \frac{1}{2}a - x$. Unde $PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 + 2cx$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx + x^2 - ax$

Fig. 32. Tab. VI. Eſt autem (§. 142)

$DC^2 : AC^2 = PM^2 : AP.PB$

$AC^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$ (§. 77 n. 1)

hoc eſt

(§. 135, 139) $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}ab = ax - x^2 : PM^2$

ſeu quia $DC^2 = FD^2 - FC^2$ (§. 139) vel ob $FD = AC$ (§. cit.) $DC^2 = AC^2 - FC^2 = \frac{1}{4}a^2 - c^2$ erit $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

multipl. per 4.

$a^2 : a^2 - 4c^2 = ax - x^2 : PM^2$

(§. 77 n. 13) $1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2}$

Ita

Itaque

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$PF^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2 + 2cx$$

$$FM^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$ (§ 272 Geom.)

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Rurſus

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2 - 2cx.$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$ (§. 272 Geom.)

$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - \frac{2cx}{a}$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

$$FM + fM = a$$

Summa ergo *rectarum* FM & *f* M *ex utraque foco* F & f *ad idem punctum* M *in peripheria ellipſeos ductarum æqualis eſt axi majori* AB.

145. Datis ergo axe majore & minore ſeu axibus conjugatis ellipſis facillime Coroll. 1.

me deſcribitur. Determinato enim utroque foco F & f (§. 139), in his deſigantur clavi: iisque circumligetur filum FMf axi majori AB æquale. Poſtea immiſſo ſtylo filum extendatur & circa clavos ſupra infraque circumducatur; atque ita ellipſis deſignabitur.

Coroll. 2. 146. *Si* puncta ellipſeos geometrice determinare cupis, ductis decenter axibus conjugatis & focis inde determinatis (§. 139), divide axem AB pro arbitrio in duas partes, ut AP & PB; & parte una (e. gr. AP) ex foco F, altera (PB e. gr.) ex foco f deſcribe arcus ſeſe ſecaturos in puncto aliquo peripheriæ ellipſeos, ut M. Poſſunt autem una eademque opera quatuor puncta in quatuor ellipſeos quadrantibus ſimul determinari, ſi quælibet pars axis in duos quadrantes ex utroque foco transfertur ſupra infraque axem.

Definitio. Fig. 11. 147. *Hyperbola* eſt linea curva, in qua $ay^2 = abx + bx^2$

adeoque $b : a = y^2 : (a + x)x$

hoc eſt: Hyperbola eſt curva, in qua quadratum ſemiordinatæ PM (y^2) eſt ad rectangulum ex abſciſſa AP (x), in rectam compoſitam ($a + x$) ex eadem abſciſ-

ſciſſa, & recta quadam conſtante a, quæ *Axis tranſverſus*, vel *Latus tranſverſum dicitur*, ut parameter axis b ad axem tranſverſum a.

148. Ut in ellipſi, ita in hyperbola *Axis conjugatus* ſeu *minor* appellatur media proportionalis inter axem tranſverſum & parametrum. Definitio.

149. *Invenire rationem ſemiordinatarum in Hyperbola.* Problema. Fig. 11.

Sit AP $= x$, Ap $= u$, PM $= y$, pm $= t$, erit (§. 147.) Reſolutio.

$$ay^2 = abx + bx^2$$

$$\& \quad at^2 = abu + bu^2$$

$$y^2 = \frac{abx + bx^2}{a}$$

$$t^2 = \frac{abu + bu^2}{a}$$

$$y^2 : t^2 = \frac{abx + bx^2}{a} : \frac{abu + bu^2}{a}$$

$$= abx + bx^2 : abu + bu^2 \text{ (§. 77.)}$$

$$= ax + x^2 : au + u^2 \text{ (§. cit.)}$$

$$= (a + x)x : (a + u)u$$

hoc eſt: In hyperbola ſunt quadrata ſemiordinatarum inter ſe, ut rectangula ex abſciſſa cuilibet ſemiordinatæ

reſpondente in aggregatum ex eadem abſciſſa & axe tranſverſo.

150. Cum theorema hoc deducatur ex tota definitione hyperbolæ, indicat illud hyperbolæ proprietatem, qua curva hæc diſtinguitur ab omni curva alia.

Problema. Fig. 12. 151. *Invenire naturam curvæ, quæ gignitur, ſi conus ACB ita ſecatur, ut ſectionis axis ex ſit coni lateri CB parallelus.*

Reſolutio. Sit recta fz rectæ AB parallela, erit, ob axem ex parallelum lateri CB *per hypoth.* Figura Bxnz parallelogrammum (§. 218 *Geom.*), ideoque $zn = Bx$, & $nx = Bz$ (§. 241 *Geom.*).

Sit inſuper recta mn ad circuli diametrum fz, & recta yx ad ſui circuli diametrum AB perpendicularis, erit $(mn)^2 = fn \cdot nz$, & $(yx)^2 = Ax \cdot Bx$ (§. 99).

Porro in triangulo Aex erit, ob fn & Ax parallelas *per conſtruct.*, $en : ex = fn : Ax$ (§. 296, 297 *Geom.*).

Quæ

Quare ſi fiat $en = G$, $ex = H$, $fn = L$, erit $G : H = L : Ax$, ideoque $Ax = \frac{HL}{G}$ (§. 110 *arith.*). Fiat porro $nz = Bx = P$, erit *per demonſtrata*

$$(mn)^2 = fn \,.\, nz = LP$$
$$(yx)^2 = Ax \,.\, Bx = \frac{HL}{G} \,.\, P$$

Ideoque ſemiordinatarum (mn) & (yx) quadrata ſunt inter ſe ut $LP : \frac{HL}{G} \,.\, P$

hoc eſt $(mn)^2 : (yx)^2 = LP : \frac{HLP}{G}$

$$= GLP : HLP \quad (\S\, 77.)$$
$$= G : H \quad (\S.\ cit.)$$

hoc eſt, in curva *emy* ſunt quadrata ſemiordinatarum inter ſe ut abſciſſæ; habet ergo curva hæc proprietatem parabolæ (§. 116.), ideoque parabola eſt. Q. *e. d.*

152. *Invenire naturam curvæ, quæ prodit, ſi conus ACB ita ſecatur, ut ſectionis axis* c d *continuatus concurrat cum baſis diametro AB continuata in E.* Problema. Fig. 12.

Sit

Sit $cd = \alpha$, $cr = x$, $co = u$, $ra = t$, $oz = ſ$; erit $rd = \alpha - x$, $od = \alpha - u$. Quare cum diametri ab & fz circulorum asb & $fmpz$ ſint parallelæ *per hypoth.* ſeu *conſtruct.*, erit in △ fco baſi fo parallela ra. Unde (§. 296. 297 *Geom.*)

$$cr : ra = co : fo$$

ſeu $x : t = u : \frac{tu}{x}$ (§. 110 *arith.*).

Et, ob oz parallelam rectæ br in △ dbr, ex eadem ratione erit

$$do : oz = dr : br$$

ſeu $\alpha - u : ſ = \alpha - x : \frac{\alpha ſ - ſx}{\alpha - u}$.

Quare cum porro sr & po ſint perpendiculares ad diametros ab & fz *per hypoth.*, erit

$$(sr)^2 = ar \, . \, br \; (§. 99) = \frac{\alpha ſt - ſtx}{\alpha - u}$$

$$\& \; (po)^2 = fo \, . \, oz \; (§. \textit{cit.}) = \frac{ſtu}{x}.$$

$$\text{Unde } (sr)^2 : (po)^2 = \frac{\alpha ſt - ſtx}{\alpha - u} : \frac{ſtu}{x}.$$

$$= \alpha ſtx - ſtx^2 : \alpha ſtu - ſtu^2 \; (§. 77.)$$

$$= \alpha x - x^2 : \alpha u - u^2 \; (§. \textit{cit.}).$$

Qua-

Quare cum curvam hanc non eſſe circulum pateat ex modo, quo conus ſecatur per hypotheſin, conſtat eam eſſe ellipſin (§. 141.).

153. *Invenire naturam curvæ, quæ prodit, ſi conus ACB ita ſecatur, ut ſectionis axis* zq *continuatus concurrat in F cum coni latere AC continuato.* Problema. Fig. 12.

Sint li & bq perpendiculares tam ad rectam zq, quam ad diametros circulorum parallelas *per conſtruct.*; MN, & AB, erunt li, & bq ſemiordinatæ tam circulorum MlN, & AbB, quam curvæ zlb. Reſolutio.

Quare ſi porro fiat $zF = a$, $zi = x$, $zq = u$, $Mi = t$, $Ni = ſ$; erit $Fi = a + x$, $Fq = a + u$, & (§. 296, 297 *Geom.*) erit

$$Fi : Mi = Fq : Aq$$

ſeu $a + x : t = a + u : \frac{at + tu}{a + x}$ (§. 110 *arith.*).

& $Zi : Ni = zq : qB$

$$x : ſ = u : \frac{ſu}{x}$$

Quare cum ſit $(li)^2 = Mi \cdot Ni$ (§. 99) $= ſt$, & $(bq)^2 = Aq \cdot Bq$ (§. cit.) $= \frac{aſtu + ſtu^2}{ax + x^2}$, erit

$$(li)^2 : (bq)^2 = ſt : \frac{aſtu + ſtu^2}{ax + x^2}$$

$$= (aſtx + ſtx^2) : (aſtu + ſtu^2)$$
(§. 77.)

$$= (ax + x^2) : (au + u^2)$$
(§. cit.)

Eſt igitur curva zlb hyperbola (§. 149. 150).

154. Viſum eſt addere poſtrema hæc problemata (§. 151 & ſeqq.), ut appareat, curvas hactenus definitas per æquationes algebraicas vere eſſe ſectiones conicas.

Finis Algebræ.

Ordnung,

nach welcher die Kupfertafeln anzuhängen.

* Tab. arith. Fig. un.		
Fig. Geom.	Tab. I.	
—	—	Tab. I*
—	—	Tab. II, III, IV, V, VI, VII, VIII
Fig. Trig.	Tab. I.	
Fig. Algebr.	Tab. I.	

Errata

Partis primæ.

Pagina	2	linea	8 & 9.	præcipis	*lege*	percipis.
—	—	—	29.	ſtipidis	—	ſtipitis
—	13	—	13.	203	—	023
—	14	—	4	6+8	—	6+3
—	18	—	23.	muniendi	—	minuendi
—	22	—	25. 26.	multiplicandis	—	multiplicantis
—	23	—	6	per 234	—	per 243
—	24	—	14.15.16.	*lege* E. gr.		36784 15 551760
—	28	—	21.	(§. 41.)	*lege*	(§. 43).
—	30	—	22.	expreſſe	—	expreſſæ
—	31	—	[illegible]	per 9 $\frac{1}{4}$	—	per 9, $\frac{1}{4}$
—	37	—	4.	quadrati 576	—	quadrati 576;
—	39	—	4.	his	*adde*	æquale vel
—	51	—	6.	(§. 92)	*lege*	(§. 98.)
—	59	—	29.	ditur	—	citur
—	81	—	15.	Fig. 5	—	Fig. 7.
—	85	—	2.	CD	—	C B
—	92	—	22.	DCB	*lege*	D C A
—	93	—	16.	AC	—	A B
—	107	—	antepenult.	*a c*	—	*b c*
—	112 & *ſeqq.*			(§. 135)	—	(§. 112).
				(§. 136)	—	(§. 115).
				(§. 137)	—	(§. 117).
				(§. 138)	—	(§. 120).
—	156	linea	19	(§. 236)	—	(§. 115).
—	166	—	11, & 16.	(§. 100	—	(§. 106
—	167	—	18 & 21	(§ 25 *arith.*)	—	(§. 29 *arith.*)
—	169	—	penult.	$\frac{1}{2}$ ABCDE	—	$\frac{1}{3}$ ABCDE
					—	170

Pagina	170	linea	2. $\frac{1}{2}$ ABCDE	——	$\frac{1}{3}$ ABCDE
——	183	——	12. 28. (§. 92.)	——	(§. 98.)
——	195	——	5. Tedraedrum	——	Tetraëdrum
——	——	——	28. *Per*	——	*Pes*
——	227	——	21 *ab*	——	*a b*
——	259	——	13 (B + B)	——	(A + B)
——	265	——	10. $B = 45^\circ 35'$	——	$B = 46^\circ$
——	308	——	antepenult. vacato	——	vocato
——	317	——	19. Ergo $\frac{1}{3} y$	——	Ergo $\frac{1}{2} x$
——	322	linea	14 (§. 177)	*lege*	(§. 90.)
——	326	——	13 nemſe	——	nempe
——	327	in margine,	Fig. 52	——	Fig. 5.
——	330	——	7 parametro, AB	——	parametro AB
——	——	——	8. poteſt BN	——	BN, poteſt
——	332	——	24. (§. 224)	——	(§. 101.)
——	338	——	18. addoque	——	adeoque
——	338	——	25. z	——	*y*
——	339	——	19. $\frac{xb^2}{a}$	——	$\frac{bx^2}{a}$
——	341	——	3. $\frac{1}{2} a^2$	——	$\frac{1}{2} a^2 b^2$
——	343	——	19. EC^2	——	FC^2
——	347	——	9 $= 2cx$	——	$- 2cx$
——	——	——	10. $2c\frac{4c^2x}{a}$	——	$2cx - \frac{4c^2x}{a}$

Era-

Abacus Pythagoricus.

B

3	4	5	6	7	8	9
6	8	10	12	14	16	18
9	12	15	18	21	24	27
12	16	20	24	28	32	36
15	20	25	30	35	40	45
18	24	30	36	42	48	54
21	28	35	42	49	56	63
24	32	40	48	56	64	72
27	36	45	54	63	72	81

D

UNIV. OF MICH.

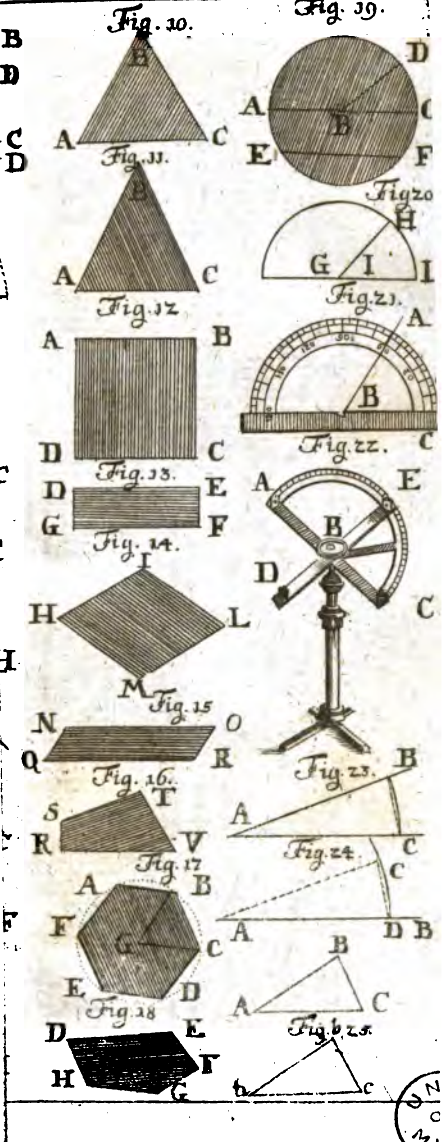

Fig. 10.
B
A
C
Fig. 11.
B
A
C
Fig. 12
A
B
D
C
Fig. 13.
D
E
G
F
Fig. 14.
I
H
L
M
Fig. 15
N
O
Q
R
Fig. 16.
S
T
R
V
Fig. 17
A
B
F
G
C
E
D
Fig. 18
D
E
H
F
G
Fig. 19.
D
A
C
B
E
F
Fig. 20
H
G
I
I
Fig. 21.
A
B
C
Fig. 22.
A
E
B
D
C
Fig. 23.
B
A
C
Fig. 24
C
A
D
B
B
A
C
Fig. 25.
b
c

Fig. Geom. Tab. I

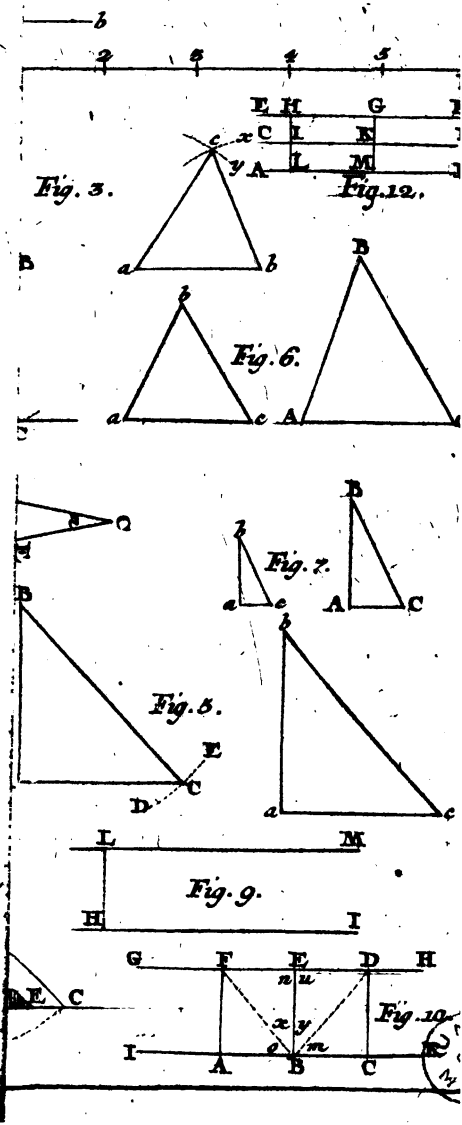


Fig. 33.

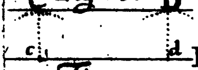


Fig. 34.



Fig. 35.

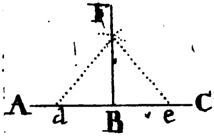


Fig. 36.

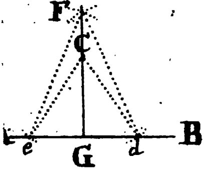


Fig. 37.

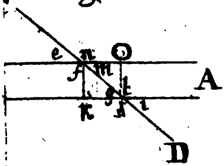


Fig. 38.

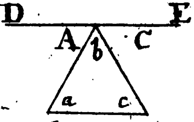


Fig. 39.

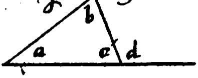


Fig. 40.

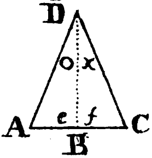


Fig. 41.

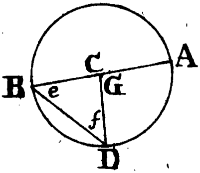


Fig. 42

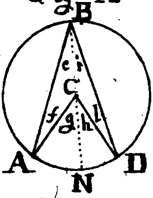


Fig. 43.

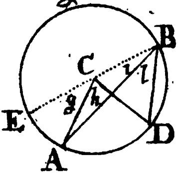


Fig. 44

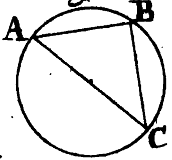


Fig. 50.

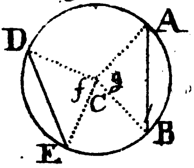


Fig. 51.

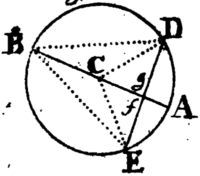


Fig. 52.

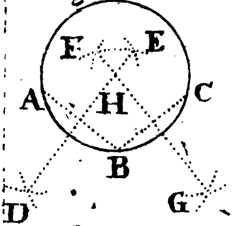


Fig. 53.

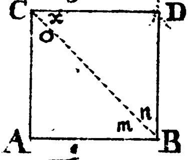


Fig. 54.

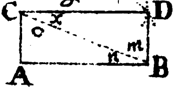




Fig. 56.

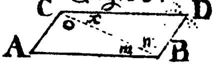


Fig. 57.

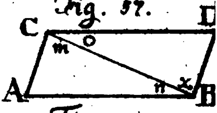


Fig. 58.

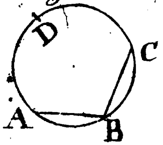


Fig. 59.

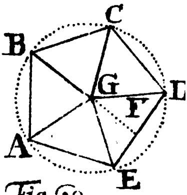


Fig. 60.

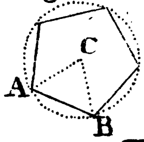


Fig. 61.

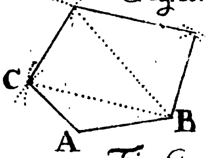
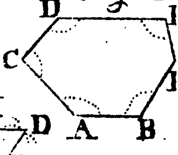
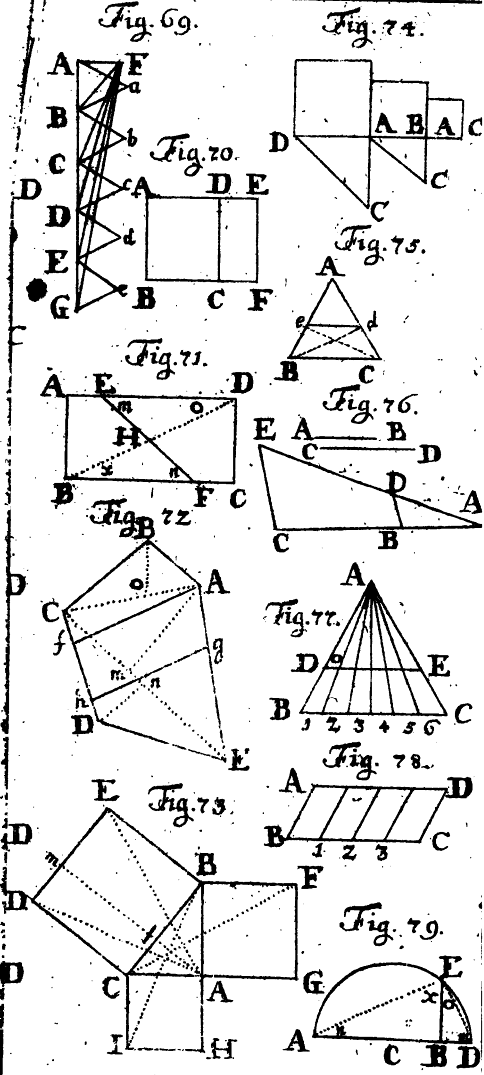


Fig. 62.



UNI
OF
MIC


Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.

UNIV OF MIC

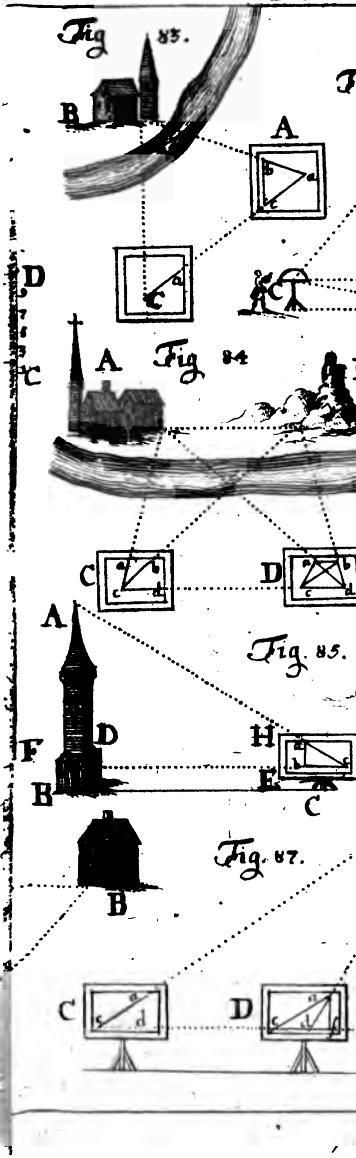

Fig 83.
B
A
D
C
A
Fig 84
C
D
A
Fig. 85.
H
D
F
B
E
C
Fig. 87.
B
C
D

FIG. GEOM. TA

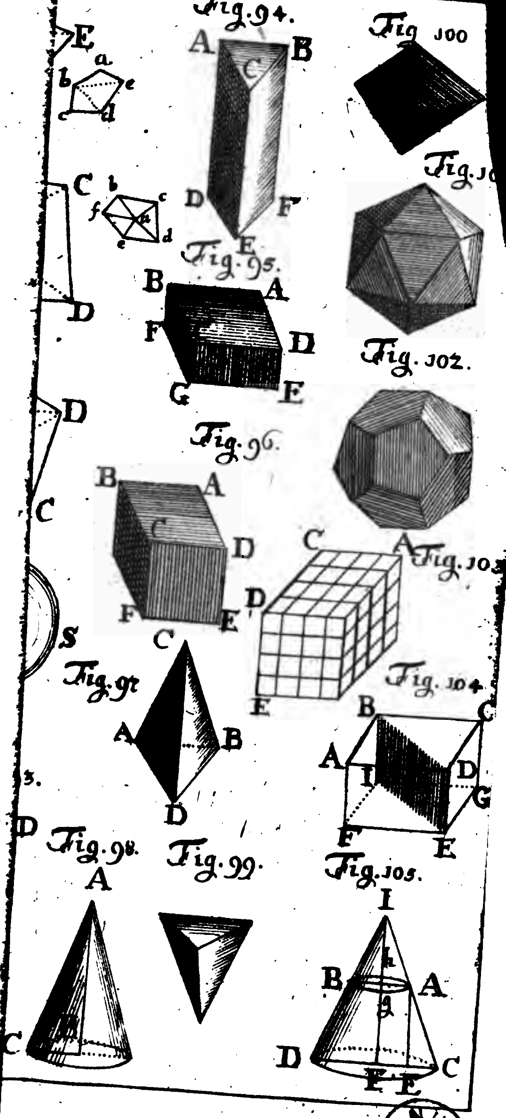

Fig. 94.
Fig 100
Fig. 95.
Fig. 102.
Fig. 96.
Fig. 97
Fig. 104
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 105.
A
B
C
D
E
F
G
I
S

Fig. 112.

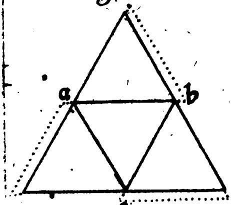


Fig. 116.

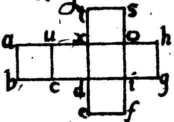


Fig. 117.

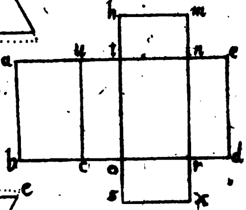


Fig. 113.

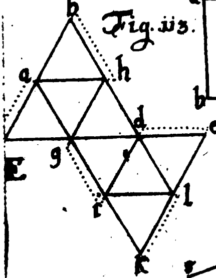


Fig. 118.

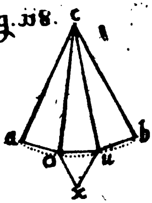


Fig. 114.

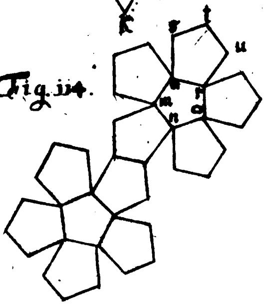


Fig. 119.

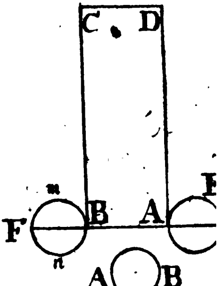


Fig. 115.

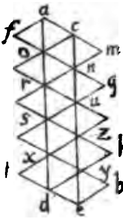
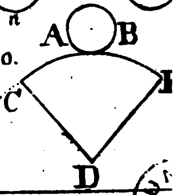


Fig. 120.



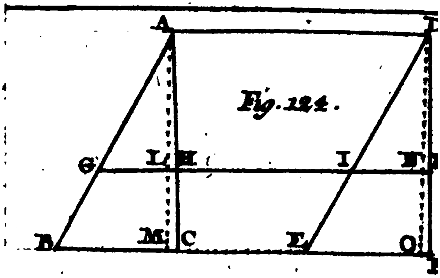


Fig. 124.

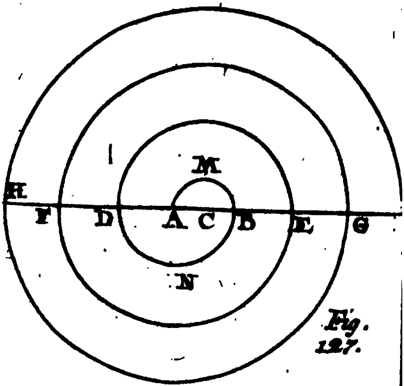


Fig. 127.

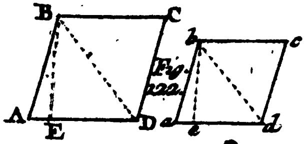


Fig. 122.

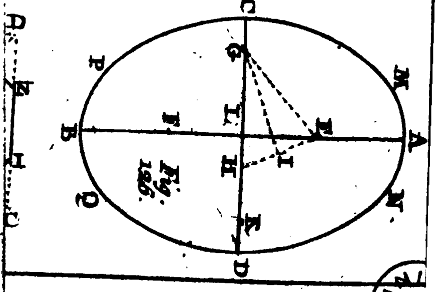
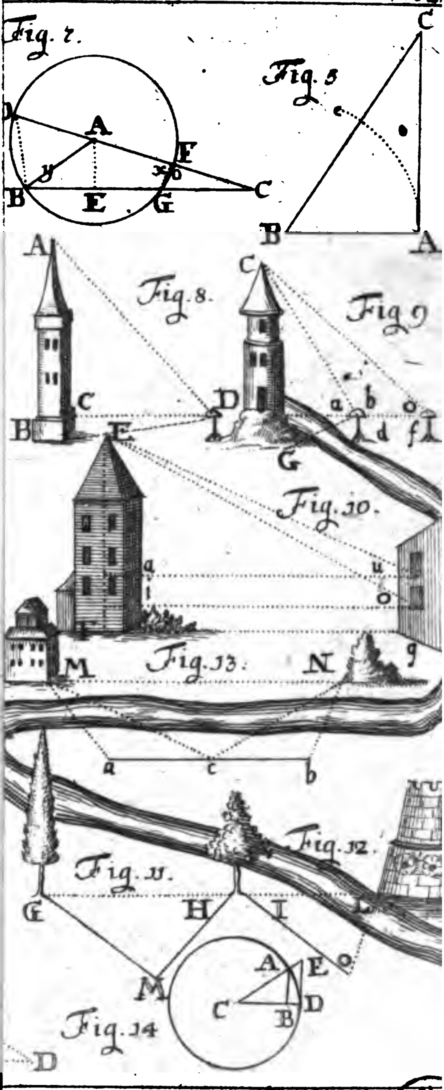


Fig. 126.


Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14